

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

تعلیم و تعلم عبادت است

ریاضیات جدید

سال سوم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۶۶

بسم الله الرحمن الرحیم

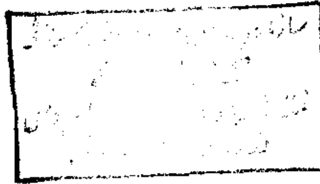
ریاضیات جدید

سال سوم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۶۰



پدیدآورندگان :

مؤلفان : غلامرضا دانش‌ناروئی میرزا جلیلی

صفحه‌پرداز : طهمورث حسن‌پور

رسام : خسرو مدیریان

چاپ از : اتحاد

بسمه تعالی

ملت قهرمان ایران با پیروی کامل از امام امت و فریاد اللهاکبر و خون شهیدان نظام پلید شاهنشاهی را در گورستان تاریخ دفن‌کرد . دژخیمان و جلادان را به آتش خشم الهی گرفتار ساخت و با شرکت فعال خود در همه‌پرسی‌ها ، نظام جمهوری اسلامی و قانون اساسی را استقرار بخشید و رئیس‌جمهور و نمایندگان مجلس شورای اسلامی را انتخاب کرد .

پس از آن با مبارزه‌ای بزرگتر برای نخستین‌بار درپیشاپیش مستضعفان جهان ، شیطان بزرگ را به ذلت و التماس کشانید .

اکنون پس از طی این مراحل معجزه‌آسا ، برای تحکیم بنیان عظیم انقلاب اسلامی و تضمین تداوم و گسترش آن و مصونیتش در برابر هر توطئه‌ای ، زمان آن فرا رسیده است که این ملت بزرگ اساسی‌ترین مرحله ، یعنی انقلاب فرهنگی را قاطعانه بانجام رساند . باید تمانده فرهنگ منحط شاهنشاهی و آموزشهای استعماری ، از تمام ارکان جامعه ، مدرسه ، دانشگاه ، ادارات و کوچه و بازارو...... زدوده شود .

انقلاب فرهنگی در اسلام منشاء دگرگونیهای اجتماعی و اساس انقلاب سیاسی و اقتصادی جامعه است و اینک ما در این برهه از زمان و در این مقطع حساس ، عهده‌دار امر بسیار خطیر و مهمی هستیم و باید با تشخیص صحیح و روشن‌بینی ، مسیر آموزش وپرورش نسل جدید را مشخص سازیم و این فرهنگ آشفته و ویران را بازسازی کنیم و بدنبال انقلاب اجتماعی و سیاسی ،در تداوم انقلاب فرهنگی نیز به‌پیروزی نائل آئیم . بازیافتن و ارائه فرهنگ اصیل اسلامی بر عهده همه علاقمندان به فرهنگ است . باید ملاکهای بیگانه و غیر اصیل را شناسائی کرد و آنها را از آموزش و پرورش کنار گذاشت . این تغییر بنیادی در فرهنگ و در نظام آموزشی،چنان نیست که بصورت فرمان از مراکز اجرائی صادر شود . این خود مردم هستند که باید بفکر آینده خود باشند و تمام علاقمندان به فرهنگ این وظیفه خطیر را بعهده دارند . دستگاه اجرائی امروز از بطن مردم است و بین این دو جدائی نیست .

در سال جاری با توجه به فرصت محدود ، برخی از کتابها بازسازی شد و برخی دیگر نیز با اصلاحات آماده گردید . در این امر از پیشنهادها و راهنمائی‌های کتبی و شفاهی بسیاری از برادران و خواهران صاحبنظر ، خصوصا" همکاران فرهنگی استفاده کردیم بامید آنکه در سال جدید با کمک همه اقشار مردم به‌پا خاسته ایران ، شاهد تغییر بنیادی نظام آموزشی دردرون یک انقلاب اصیل فرهنگی باشیم تا تغییر و اصلاح اساسی ، بدانگونه که باید صورت گیرد و کتابهای‌درسی بر اساس‌آن نظام تدوین‌شود .

دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تاءلیف کتابهای‌درسی

فهرست

فصل اول

اعداد حقیقی

مقدمه ـ مجموعه اعداد حقیقی بیشتر از هر مجموعه دیگر در ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد بهمین دلیل ما در این فصل تا آنجا که ممکن است این مجموعه را مورد بررسی قرار می‌دهیم .

دراین فصل ابتدا خواص جبری مجموعه اعداد حقیقی بیان خواهد شد و سپس بعضی از نتیجه‌های حاصل ازآن مورد بررسی قرار خواهد گرفت .

همانطوریکه می‌دانید مجموعه اعداد حقیقی با R نشان داده می‌شود و به هر دو عدد حقیقی a , b یك عدد حقیقی منحصر بفرد $a+b$ (که مجموع a , b نامیده می‌شود) و یك عدد حقیقی منحصربفرد $a . b$ (که گاهی با ab نیز نشان داده می‌شود وحاصلضرب a , b نامیده می‌شود) مربوط می‌شود . بعبارت دیگر دو عمل «+» و «.» که بترتیب جمع و ضرب نامیده می‌شوند روی R تعریف شده است.

خواص جبری R[1]

الف ـ خواص عمل «+» در R

ج ۱ـ عمل «+» در R شرکت پذیر است. یعنی اگر c , b , a سه عدد حقیقی باشند، داریم :

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

ج ۲ـ در R یك عضو «۰» که صفر نامیده می‌شود وجود دارد بطوری که برای هر a متعلق به R داریم :

$$a+0=0+a=a$$

ج ۳ـ برای هر a در R یك عدد حقیقی مثل «x» وجود دارد که وارون a نسبت به عمل جمع نامیده می‌شود و دارای خاصیت زیر است .

$$a+x=x+a=0$$

۱ـ این خواص جبری به تنهائی مشخص‌کننده مجموعه اعداد حقیقی نمی‌باشد (برای مثال مجموعه‌اعدادگویا باهمان محل‌های جمع وضرب اعداد حقیقی نیز دارای همین‌خواص است) البته‌خواص دیگری وجود داردکه اگر به خواص جبری اضافه شوند ، مجموعه اعداد حقیقی را بمعنی خاصی مشخص خواهند کرد .

وارون a نسبت به عمل جمع با «$-a$» نشان داده می‌شود .

ج ۴- عمل «+» در R دارای خاصیت جابجائی است . یعنی a و b دو عدد حقیقی باشند، داریم :

$$a+b=b+a$$

خاصیت‌های ج ۱ ، ج ۲ ، ج ۳ و ج ۴ بیان می‌کندکه $(R, +)$ یک گروه جابجائی باعضو بی‌اثر صفر است .

ب - خواص عمل ضرب در R

ض ۱- عمل ضرب در R دارای شرکت‌پذیری است. یعنی اگر c, b, a سه عدد حقیقی باشند ، داریم :

$$a.(b.c)=(a.b).c$$

ض ۲- در R یک عضو « ۱ » که یک خوانده می‌شود وجود دارد بطوری که $0 \neq 1$ و برای هر a متعلق به R داریم :

$$a.1=1.a=a$$

ض ۳- برای هرعدد حقیقی ومخالف صفر a ، یک عدد حقیقی مثل «x» وجود دارد که وارون a نسبت به‌عمل ضرب نامیده می‌شود ودارای خاصیت زیر است .

$$a.x=x.a=1$$

اگر $a \neq 0$ ، وارون a نسبت به‌عمل ضرب را با «a^{-1}» ویا «$\frac{1}{a}$» نشان می‌دهیم .

ض ۴- عمل ضرب در R دارای خاصیت جابجائی است یعنی اگر a, b دو عدد حقیقی باشند ، داریم :

$$a.b=b.a$$

خاصیت‌های ض ۱ ، ض ۲ ، ض ۳ و ض ۴ بیان می‌کنند که $(R-\{0\}, 0)$ یک گروه جابجائی با عضو بی‌اثر «یک» است .

پ - خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع

اگر a, b, c اعداد حقیقی باشند، داریم :

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

خاصیت‌های الف ، ب و پ خواص جبری R نامیده می‌شوند .

از آنچه در ریاضیات جدید سال دوم درمورد گروهها خواندید نتیجه می‌شود که :

۱- عنصرهای بی‌اثر نسبت به‌عمل‌های جمع وضرب در R (یعنی صفر ویک) منحصربفرد می‌باشند یعنی R تنها دارای یک عنصر بی‌اثر نسبت به‌عمل جمع وتنها دارای یک عنصر بی‌اثر

نسبت به‌عمل ضرب است).

۲ــ عنصر وارون هرعدد حقیقی نسبت به‌عمل جمع وعنصر وارون هرعدد حقیقی مخالف صفر نسبت به عمل ضرب منحصر بفرد است (یعنی هرعدد حقیقی تنها دارای یك وارون نسبت به‌عمل جمع است وهرعدد حقیقی مخالف صفر تنها دارای یك وارون نسبت به‌عمل‌ضرب است)

اگر a, b دوعدد حقیقی باشند، تعریف می‌کنیم :

$$a-b=a+(-b)$$

همچنین اگر $b\neq 0$ ، تعریف می‌کنیم :

$$a:b=a\left(\frac{1}{b}\right)=a.b^{-1}$$

$a-b$ تفاضل b از a و $a:b$ تقسیم a بر b نامیده می‌شوند .

توجه‌کنیدکه اگر $b=0$ ، تقسیم a بر b تعریف نشده است .

خاصیت تساوی : اگر $a=b$ و $c=d$ ، پس $a+c=b+d$ و $ac=bd$.

ما ازحالا ببعدگاهی بجای $a.b$ می‌نویسیم ab.

تعریف ــ اگر a یك عدد حقیقی باشد، تعریف می‌کنیم :

$$a^2=aa\ ,\ a^3=(a^2)a\ ,\ a^4=(a^3)a\ ,\ldots$$

وبطورکلی اگر n یك عدد طبیعی باشد، تعریف می‌کنیم :

$$a^n=(a^{n-1})a$$

حالا با استفاده از خواص جبری R قضایای زیر را (که خاصیت‌های دیگری از R را مشخص می‌سازند) ثابت می‌کنیم :

قضیه ۱ــ برای هرعدد حقیقی a داریم :

$$a.0=0$$

اثبات :

خاصیت ج۲ : $1=1+0$

خاصیت تساوی : $a.1=a.(1+0)$

خاصیت پخشی و ض۲ : $a=a.1+a.0$

خاصیت ض۲ : $a=a+a.0$

خاصیت ج۲ : $a.0=0$

(زیرا عنصر بی‌اثر نسبت به عمل جمع منحصربفرد است)

قضیه ۲ــ برای هر دو عدد حقیقی b, a داریم :

$$ab=0 \Longrightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

اثبات ـ اگر $a=0$ ، قضیه ثابت است و اگر $a\neq 0$ ، نشان می‌دهیم که $b=0$.
فرض کنیم $a\neq 0$. دراین‌صورت خواهیم داشت :

فرض	$ab=0$
خاصیت تساوی	$a^{-1}(ab)=a^{-1}0$
بنابر قضیه ۱	$a^{-1}0=0$
خاصیت ض ۱	$a^{-1}(ab)=(a^{-1}a)b$
خاصیت ض ۳	$=1.b$
خاصیت ض ۲	$=b$

بنابراین $b=0$.
ازقضیه ۲ درحل معادلات استفاده می‌شود مثلاً

$$(x-1)(x+1)=0\Longrightarrow x-1=0 \text{ یا } x+1=0\Longrightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$$

زیر مجموعه‌های R

اگر قرار دهیم

$$2=1+1 \text{ ، } 3=2+1 \text{ ، } 4=3+1, \ldots,$$

مجموعه اعداد طبیعی بدست می‌آید. یعنی

$$\text{مجموعه اعداد طبیعی} = N=\{1,2,3,4,\ldots\}$$

مجموعه‌ایکه از وارون‌های اعـداد طبیعی نسبت به عمل جمع تشکیل شده است مجموعه اعداد درست منفی نامیده می‌شود . یعنی

$$\text{مجموعه اعداد درست منفی} = \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$$

همچنین همانطوری‌که می‌دانید مجموعه

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

مجموعه اعداد درست نامیده می‌شود .

بالاخره مجموعه

$$Q=\left\{\frac{p}{q} : p \text{ , } q\in Z \text{ و } q\neq 0\right\}$$

مجموعه اعداد گویا نامیده می‌شود .

هرعدد حقیقی که گویا نباشد یك عدد ناگویا نامیده می‌شود . برای مثال عدد حقیقی a که با $a^2=2$ تعریف شده است، یك عدد ناگویا است (چرا ؟) این عدد ناگویا با $\sqrt{2}$ نشان داده می‌شود . دراینجا متذکر می‌شویم که اثبات ناگویابودن یك عدد حقیقی ممکن است بسیار مشکل باشد .

تمرین

۱ـ نشان دهیدکه هیچ عدد حقیقی مانند x وجود ندارد بطوری‌که

$$0 . x = 1$$

۲ـ نشان دهیدکه برای هرعدد حقیقی a داریم :

$$(-1) . a = -a$$

۳ـ اگر a یك عدد حقیقی مخالف صفر باشد ، نشان دهید که

الف ـ a^{-1} مخالف صفر است

ب ـ $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

۴ـ نشان دهیدکه $\sqrt{2}$ یك عدد ناگویا است .

فصل دوم

فضای برداری

مقدمه ـ در ریاضیات جدید سال دوم بامفهوم یك گروه آشنا شدید . دراین فصل با یك مفهوم دیگر بنام «فضای بردار» آشنا خواهید شد . فضای برداری یکی از مفاهیم جالب و مهم در ریاضیات است و دارای کاربردهای زیادی در رشته‌های گوناگون از جمله فیزیك و اقتصاد است .

یادآوری می‌کنیم که مجموعه اعداد حقیقی با R نشان داده می‌شود .

تعریف ـ فرض‌کنیم ($\oplus$ و V) یك گروه جابجائی باشد . همچنین فرض کنیم برای هر $v \in V$ وهر $a \in R$ ، حاصلضرب av تعریف شده باشد و $av \in V$.

(av حاصلضرب اسکالر نامیده می‌شود) . در اینصورت گوئیم V یك فضای برداری روی R است هرگاه

الف ـ برای هر $v \in V$ داشته باشیم :

$$1v = v$$

که در آن «۱» عضو بی‌اثر مجموعه اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع است .

ب ـ اگر a , b اعداد حقیقی باشند و v متعلق به V باشد ، داشته باشیم :

$$(a+b)v = av + bv$$

پ ـ اگر a , b اعداد حقیقی باشند و v متعلق به V باشد ، داشته باشیم :

$$(ab)v = a(bv)$$

ت ـ اگر v_1 و v_2 متعلق به V باشند و a یك عدد حقیقی باشد، داشته باشیم :

$$a(v_1 \oplus v_2) = av_1 \oplus av_2$$

هریك از عنصرهای V یك «بردار» نامیده می‌شود .

توجه : از حالا به بعد عمل «$\oplus$» روی V را برای سادگی با «+» نشان می‌دهیم . همچنین عنصر بی‌اثر V نسبت به عمل «+» را «بردار صفر» می‌نامیم و با $\vec{o}$ نشان می‌دهیم یك بردار را معمولاً با یکی از حروف u , v , w , ... و یك عدد حقیقی را با یکی از حروف a , b , c , ... نشان می‌دهیم .

مثال ۱ــ همانطوری‌که می‌دانید $(R , +)$ یك گروه جابجائی است که **درآن** «+» عمل جمع درمجموعه اعداد حقیقی است. اگر قرار دهیم $V = R$ وحاصلضرب اسکالر را **همان** ضرب اعداد حقیقی درنظر بگیریم . بسادگی می‌توان دید که مجموعه اعداد حقیقی یك فضای برداری روی R است زیرا :

الف ـ $1a = a \qquad \forall a \in R$

ب ـ $(a+b)c = ac+bc \qquad \forall a , b , c \in R$

پ ـ $(ab)c = a(bc) \qquad \forall a , b , c \in R$

ت ـ $a(b+c) = ab+ac$

مثال ۲ــ فرض کنیم :

$$V = R \times R = R^2 = \{(a_1 , a_2) : a_1 , a_2 \in R\}$$

اگر عمل «+» را روی R^2 بصورت زیر تعریف کنیم :

$$(a_1 , a_2)+(b_1 , b_2) = (a_1+a_2 \;,\; b_1+b_2) \qquad \forall (a_1 , a_2) \text{ و } (b_1 , b_2) \in R^2$$

بسادگی می‌توان دید که $(V , +)$ یك گروه جابجائی است . زیرا :

۱ـ برای هر (c_1 , c_2) ، (b_1 , b_2) و (a_1 , a_2) متعلق به R^2 می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}[(a_1 , a_2)+(b_1 , b_2)]+(c_1 , c_2) &= (a_1+b_1 , a_2+b_2)+(c_1 , c_2)\\ &= [(a_1+b_1)+c_1 , (a_2+b_2)+c_2]\\ &= [a_1+(b_1+c_1) , a_2+(b_2+c_2)]\\ &= (a_1 , a_2)+(b_1+c_1 , b_2+c_2)\\ &= (a_1 , a_2)+[(b_1 , b_2)+(c_1 , c_2)]\end{aligned}$$

۲ـ برای هر (a_1 , a_2) متعلق به R^2 داریم :

$$(a_1 , a_2)+(0 , 0) = (0 , 0)+(a_1 , a_2) = (a_1 , a_2)$$

یعنی $(0 , 0)$ عضو بی‌اثر عمل «+» در R^2 است .

۳ـ برای هر (a_1 , a_2) متعلق به R^2 داریم :

$$(a_1 , a_2)+(-a_1 , -a_2) = (-a_1 , -a_2)+(a_1 , a_2) = (0 , 0)$$

یعنی هرعنصر از R^2 دارای یك عنصر وارون نسبت به عمل «+» است .

۴ـ برای هر (a_1 , a_2) و (b_1 , b_2) متعلق به R^2 داریم :

$$\begin{aligned}(a_1 , a_2)+(b_1 , b_2) &= (a_1+b_1 , a_2+b_2)\\ &= (b_1+a_1 , b_2+a_2)\\ &= (b_1 , b_2)+(a_1 , a_2)\end{aligned}$$

یعنی «+» روی R^2 دارای خاصیت جابجائی است .

حالا برای هر $c \in R$ و $(a_1, a_2) \in R^2$ تعریف می‌کنیم :

$$c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$$

به سادگی می‌توان دید کـه $(V, +)$ با این حاصلضرب اسکالر یك فضای برداری روی R است زیرا :

الف ـ برای هر $(a_1, a_2) \in R^2$ داریم :

$$1(a_1, a_2) = (1a_1, 1a_2) = (a_1, a_2)$$

ب ـ اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $(a_1, a_2) \in V = R^2$ ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(c+d)(a_1, a_2) &= ((c+d)a_1, (c+d)a_2) \\ &= (ca_1 + da_1, ca_2 + da_2) \\ &= (ca_1, ca_2) + (da_1, da_2) \\ &= c(a_1, a_2) + d(a_1, a_2)\end{aligned}$$

پ ـ اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $(a_1, a_2) \in V = R^2$ ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(cd)(a_1, a_2) &= ((cd)a_1, (cd)a_2) = \\ &= (c(da_1), c(da_2)) \\ &= c(da_1, da_2) \\ &= c(d(a_1 a_2))\end{aligned}$$

ت ـ اگر $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V = R^2$ و c یك‌عدد حقیقی باشد ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}c((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) &= c(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= (c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2)) \\ &= (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2) \\ &= (ca_1, ca_2) + (cb_1, cb_2) \\ &= c(a_1, a_2) + c(b_1, b_2)\end{aligned}$$

مثال ۳ ــ مجموعه همه ماتریسهای ۲ × ۲ $= V$ را درنظر بگیرید ، همانطوری که در ریاضیات جدید سال دوم دیدید $(V, +)$ یك گروه جابجائی است (کـه در آن «+» عمل جمع ماتریسهای ۲ × ۲ می‌باشد) .

حال اگر c یك عدد حقیقی و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یك ماتریس ۲ × ۲ باشد ،

همانطوری که در ریاضیات جدید سال دوم دیدید تعریف می‌کنیم :

$$cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

بدین‌ترتیب یك حاصلضرب اسکالر روی V تعریف می‌شود .

بسادگی می‌توان نشان داد که $(V, +)$ با این حاصلضرب اسکالر یك فضای برداری روی R است زیرا :

الف ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یك ماتریس 2×2 باشد خواهیم داشت :

$$1A = 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

ب ـ اگر c, d اعداد حقیقی باشند و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یك ماتریس 2×2 باشد خواهیم داشت :

$$(c+d)A = (c+d)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c+d)a_{11} & (c+d)a_{12} \\ (c+d)a_{21} & (c+d)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}+da_{11} & ca_{12}+da_{12} \\ ca_{21}+da_{21} & ca_{22}+da_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= cA + dA$$

پـ اگر c, d اعـداد حقیقی باشند و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یـك ماتـریس 2×2 باشد ، خواهیم داشت :

$$(cd)A = (cd)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cd)a_{11} & (cd)a_{12} \\ (cd)a_{21} & (cd)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(da_{11}) & c(da_{12}) \\ c(da_{21}) & c(da_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\left(d\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = c(dA)$$

ت ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ دو مـاتـریس 2×2 باشند و $c \in R$ ، خواهیم داشت :

$$c(A+B) = c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11}+b_{11}) & c(a_{12}+b_{12}) \\ c(a_{21}+b_{21}) & c(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}+cb_{11} & ca_{12}+cb_{12} \\ ca_{21}+cb_{21} & ca_{22}+cb_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= cA + cB$$

حالا باثبات چند قضیه در مورد فضاهای برداری می‌پردازیم .

درقضایای زیر فرض می‌کنیم V یك فضای برداری ، «$\bar{o}$» بردارصفر و «o» عدد حقیقی صفر باشد .

قضیه ۱ — برای هرعدد حقیقی a داریم :

$$a\bar{o} = \bar{o}$$

اثبات ـ اگر v متعلق به V باشد ، می‌توان نوشت :

$av = a(v + \bar{o})$ چرا ؟

$= av + a\bar{o}$ چرا ؟

از اینجا نتیجه می‌شود که $a\bar{o} = \bar{o}$ ، زیرا عنصر بی‌اثر درگروه $(V, +)$ منحصربفرد است .

قضیه ۲ — برای هر $v \in V$ داریم :

$$o\,v = \bar{o}$$

اثبات ـ اگر $v \in V$ و a یك عدد حقیقی باشد ، می‌توان نوشت :

$av = (a + o)v$ چرا ؟

$= av + o\,v$ چرا ؟

از اینجا نتیجه می‌شود که $o\,v = \bar{o}$ ، زیرا عنصر بی‌اثر درگروه $(V, +)$ منحصربفرد است .

قضیه ۳ — اگر $v \in V$ و a یك عدد حقیقی باشد ، داریم :

$$a(-v) = (-a)v = -(av)$$

اثبات ـ برای اثبات تساوی $(-a)v = -(av)$ کافی است نشان دهیم که $av + (-a)v = \bar{o}$. (چرا ؟) .

بنابر قضیه ۲ می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} av+(-a)v &= (a+(-a))v \\ &= 0v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

همچنین برای اثبات تساوی $a(-v)=-(av)$ کافی است نشان دهیم که $av+a(-v)=\bar{0}$. (چرا ؟) .

بطور مشابه بنابرقضیه ۱ می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} av+a(-v) &= a(v+(-v)) \\ &= a\bar{0} \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

وبنابراین قضیه ثابت می‌شود .

ازقضیه ۳ نتیجه می‌شود که برای هر $v\in V$ تساوی زیر برقرار است . (چرا ؟)

$$(-1)v=-v$$

قضیه ۴ ــ اگر $v\in V$ و a یك عدد حقیقی باشد ، داریم :

$$av=\bar{0} \Longrightarrow a=0 \quad \text{یا} \quad v=\bar{0}$$

اثبات ـ فرض کنیم $av=\bar{0}$. اگـر a برابر با صفر باشد، قضیه ثابت است و اگر a مخالف صفر باشد ، خواهیم داشت :

$v=1v$	چرا ؟
$=(a^{-1}a)v$	چرا ؟
$=a^{-1}(av)$	بنا بفرض
$=a^{-1}\bar{0}$	بنابر قضیه ۱
$=\bar{0}$	

زیر فضای یك فضای برداری

در بسیاری موارد ، در یك فضای برداری V ، زیرمجموعه‌هایی از V یافت می‌شوند که خود باهمان دوعمل جمع وضرب اسکالر که در V تعریف شده‌است تشکیل یك‌فضای برداری می‌دهند . این زیرمجموعه‌ها را که دارای اهمیت زیادی هستند زیر فضا می‌نامند . به مناسبت اهمیتی که این زیرمجموعه‌ها دارند تعریف زیررا می‌آوریم :

تعریف ـ فرض‌کنیم V یك فضای برداری و $U\subset V$. اگر U با دو عملی که در V تعریف شده‌اند . یك‌فضای برداری باشد ، آنگاه U را یك زیر فضای برداری V می نامند .

مثال ۱ ـ فرض کنیم V فضای برداری R^2 روی میدان R باشد ، آن‌گاه :

$$W_1=\{(x,0)\,|\,x\in R\}$$

یك زیرفضای V است .

حل ـ الف : $(W_1 , +)$ یك گروه آبلی یا جابجائی است . زیرا :

۱ـ برای هر $(x_1 , 0)$ و $(x_2 , 0)$ در W_1 داریم :

$$(x_1 , 0)+(x_2 , 0)=(x_1+x_2 , 0+0)=(x_1+x_2 , 0)$$

پس W_1 نسبت به‌عمل جمع بسته است .

۲ـ چون عمل $+$ در R^2 شرکت‌پذیر است ، این عمل در W_1 نیز که زیر مجموعهٔ آن است شرکت‌پذیر است .

۳ـ روشن است که $(0 , 0)\in W_1$ ، وچون $(0 , 0)$ عضو بی‌اثر R^2 نسبت به‌عمل $+$ است . این‌عضو با هر عضو دلخواه $(x , 0)$ از W_1 نیز جمع شود حاصل $(x , 0)$ است .

۴ـ روشن است که برای هر $(x , 0)$ در W_1 عضوی‌مانند $(-x , 0)$ به‌نام عضومتقابل آن وجود دارد به‌قسمی که :

$$(x , 0)+(-x , 0)=(-x , 0)+(x , 0)=(0 , 0)$$

۵ـ چون عمل $+$ در R^2 تعویض‌پذیر است ، در W_1 نیز این ویژگی برقرار است :

ب : ۶ـ برای هر $r\in R$ وهر $(x , 0)\in W$ داشته باشیم $r(x_1 , 0)\in W$.

۷ـ برای هر $r\in R$ وهر $(x_1 , 0)$ و $(x_2 , 0)$ در W_1 داریم :

$$r((x_1 , 0)+(x_2 , 0))=r(x_1+x_2 , 0)=(r(x_1+x_2) , r0)$$
$$=(rx_1+rx_2 , 0)=(rx_1 , 0)+(rx_2 , 0)=r(x_1 , 0)+r(x_2 , 0)$$

۸ـ همچنین برای هر r و s در R و هر $(x , 0)$ داریم :

$$(r+s)(x , 0)=((r+s)x , 0)=(rx+sx , 0)$$
$$=(rx , 0)+(sx , 0)$$
$$=r(x , 0)+s(x , 0)$$

۹ـ همچنین داریم :

$$r(s(x , 0))=r(sx , 0)=(r(sx) , 0)=((rs)x , 0)=(rs)(x , 0)$$

۱۰ـ برای هر $(x_1 , 0)$ در W_1 داریم :

$$1(x , 0)=(1x , 0)=(x , 0)$$

یعنی‌تمام اصلهای یك‌فضای برداری برقراراست ، بنابراین W_1 یك‌فضای برداری روی R است .

تعبیر هندسی ـ ازنظر هندسی مجموعهٔ :

$$W_1=\{(x , 0)\,|\,x\in R\}$$

مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که عرض آنها برابر صفر است و می‌دانیم که نمودار این مجموعه محور xهاست . پس محور xها یك زیرفضای برداری صفحه است .

مثال ۲ ـ درفضای برداری R^2 ، زیرمجموعهٔ U_1 را چنین تعریف می‌کنیم :

$$U_1=\{(x,y)\mid x-y=0\}$$

نشان دهید که U_1 یک زیرفضای R^2 است .

حل ـ الف ـ $(U_1,+)$ یك گروه آبلی یا جابجائی است ، زیرا :

۱ـ برای هر (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در U_1 داریم :

$$(x_1,y_1)\in U_1 \Longrightarrow x_1-y_1=0 \qquad (1)$$

$$(x_2,y_2)\in U_1 \Longrightarrow x_2-y_2=0 \qquad (2)$$

از جمع طرفین (۱) و (۲) داریم .

$$(x_1-y_1)+(x_2-y_2)=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=0$$

پس : $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\in U_1$ ، یعنی U_1 نسبت به عمل جمع بسته است .

۲ـ شرکت‌پذیری : چون $+$ در R^2 شرکت‌پذیر است ، این عمل در U_1 ، که زیرمجموعهٔ آن است ، نیز شرکت‌پذیر می‌باشد .

۳ـ روشن است که $(0,0)\in U_1$ و چون $(0,0)$ ، عضو بی‌اثر $+$ در R^2 است . درنتیجه این عضو با هر عضو دلخواه (x,y) از U_1 جمع شود حاصل (x,y) است .

۴ـ اگر $(x,y)\in U_1$ ، آن‌گاه متقابل‌آن یعنی $(-x,-y)$ نیز در U_1 است، زیرا :

$$(x,y)\in U_1 \Longrightarrow x-y=0$$

$$\Longrightarrow -x+y=0 \quad \text{چرا ؟}$$

$$\Longrightarrow (-x)-(-y)=0$$

۵ـ چون عمل $+$ در R^2 تعویض‌پذیر است ، این‌عمل در U_1 نیز ، که زیرمجموعهٔ آن است ، تعویض‌پذیر می‌باشد .

ب ـ داریم

$$6-\ r(x_1,y_1)\in U_1$$

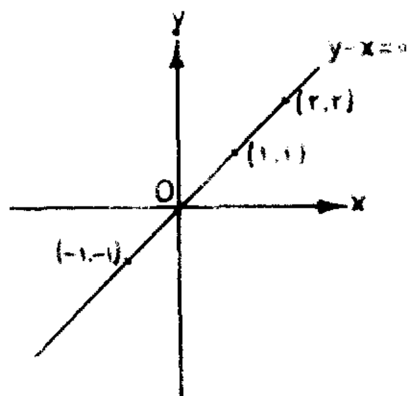
$$7-\ r[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=r(x_1,y_1)+r(x_2,y_2)$$

$$8-\ (r+s)(x_1,y_1)=r(x_1,y_1)+s(x_1,y_1)$$

$$9-\ 1(x_1,y_1)=(x_1,y_1)$$

$$10-\ (rs)(x_1,y_1)=r[s(x_1,y_1)]$$

یعنی تمام اصلهای یک فضای برداری برقرار است . بنابراین U_1 زیرفضای برداری R^2 است .



تعبیر هندسی ـ از نظر هندسی مجموعه :

$U_1=\{(x , y) \mid y-x=0\}$

مجموعهٔ تمام نقاطی ازصفحه است که تفاضل عرض وطول آنها صفر می‌باشد . و نمودار آن همان‌طور که می‌دانیم نیمساز ربع اول وسوم است . خواص بالا را ازنظر ترسیمی می‌توان روی این خط تحقیق کرد .

توجه‌نمایید که تمام زیرمجموعه‌های V زیرـ فضا نیستند . در زیر دو نمونه از این زیرمجموعه‌ها را می‌بینید .

۱ـ زیر مجموعهٔ $U_2=\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ یك زیر فضای R^2 نیست . زیرا U_2 نسبت به عملهای $+$ و ضرب اسکالر تعریف شده در R^2 بسته نیست .

۲ـ زیر مجموعهٔ $W_2=\{(0,1),(0,2),(0,3),\ldots\}$ ، یك زیرفضای برداری R^2 نیست زیرا ، اگرچه W_2 نسبت به عمل $+$ بسته است ولی نسبت به عمل‌ضرب بسته نیست .

در مثالهای (۱) و (۲) صفحهٔ قبل ، در تحقیق این‌که U_1 یا W_1 زیرفضای یك فضای برداری V هست یا نه ، تمام ویژگیهای فضای برداری را برای‌آنها تحقیق کردیم . درصورتی که به‌طور روشن در این دو مثال دیده می‌شود که بیشتر ویژگیهای V به طور مستقیم به U_1 یا W_1 منتقل می‌شود . آیا می‌توانید ویژگیهایی را که مستقیماً از V به U_1 یا W_1 منتقل نمی‌شود نام ببرید ؟

در این دو مثال چنین به‌نظر می‌رسد که برای نشان دادن آن که یك زیر مجموعهٔ V ، زیرفضای V است یا نه کافی است ویژگیهای خاصی از V را برای آن تحقیق کنیم . قضیه‌زیر شرط لازم وکافی را برای این‌که یك زیرمجموعهٔ V یك زیرفضا باشد نشان می‌دهد .

قضیه ـ هرگاه W یك زیرمجموعهٔ غیر تهی از فضای برداری V باشد ، شرط لازم و کافی برای آن که W یك زیر فضای V باشد آن است که W نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد ، $(p \Leftrightarrow q)$

(زیر بخش «W یك زیر فضای V» با p و بخش «نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب» با q مشخص شده است.)

برهان ـ شرط لازم ـ اگر W زیرفضای V باشد ، W نسبت به دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته است . از آن‌گاه نشان می‌دهیم که W دارای ویژگیهای یك فضای برداری است . تنها دو تا از ویژگیهای V مستقیماً به W نرسیده است و آنها عبارتند :

« $0 \in W$ » و « از $X \in W$ نتیجه می‌شود $(-X) \in W$ » .

برای آنکه نشان دهیم $\bar{0}\in W$ ، گوییم : چون W تهی‌نیست پس دست‌کم یك عضو مانند X در W وجود دارد وچون W نسبت به ضرب اسکالر بسته است پس $\bar{0}=\circ X\in W$ ، یعنی $\bar{0}\in W$.

برای آن‌که نشان‌دهیم « $X\in W \Longrightarrow -X\in W$ » بازگوییم : چون $X\in W$ و $-1\in R$ و W نسبت به ضرب اسکالر بسته است پس $(-1)X\in W$. اما بنا به نتیجه قضیه ۳ داریم : $(-1)X=-X$ ، پس $-X\in W$

شرط کافی : فرض کنیم W زیر فضای V باشد ، طبق تعریف زیر فضا داریم کـه W نسبت به جمع وضرب اسکالر بسته است .

نتیجه ـ هر زیر فضای V شامل بردار $\bar{0}$ است

مثال ـ مجموعهٔ $W=\{a(2,1)|a\in R\}$ یك زیرفضای R^2 است . زیرا ،

اولاً :

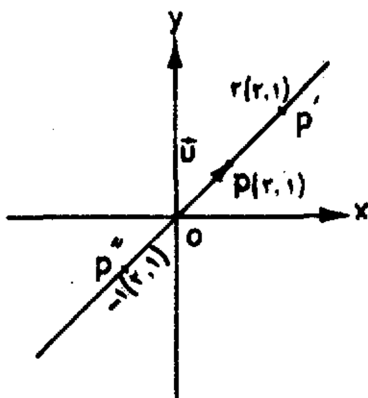
$$a(2,1)+b(2,1)=(a+b)(2,1)$$

وچون $(a+b)\in R$ ، پس W نسبت به‌عمل + بسته است .

ثانیاً :

$$b[a(2,1)]=(ba)(2,1)$$

و چون $ba\in R$ ، پس W نسبت به ضرب اسکالر بسته است . در نتیجه ، بنا بر قضیهٔ بالا ، W یك زیر فضای R^2 است .



تعبیر هندسی ـ می‌دانیم (۱ ، ۲) بردار مکان $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ را مشخص می‌سازد و برای هر $a\in R$ بردار $a(2,1)$ نیز یك بردار مکان در امتداد $\overrightarrow{OP}$ است . به‌عبارت دیگر ، $a(2,1)$ که حاصل ضرب اسکالر a در بردار $\vec{v}$ است. یك زیرفضای V ، یعنی‌زیرفضای بردارهای صفحه است .

تمرین

۱ـ ثابت کنید $S=\{ax+b|a,b\in R\}$ ، همراه با اعمال جمع و ضرب یك عدد در دوجمله‌ای یك فضای برداری روی R است .

۲- در $R^3=\{(a, b, c)|a, b, c\in R\}$ ، جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(a, b, c)+(d, e, f)=(a+d, b+e, c+f)$$

$$k(a, b, c)=(ka, kb, kc) \quad k\in R$$

نشان دهید که R^3 یك فضای برداری روی R است .

۳- هرگاه V یك‌فضای برداری و $v\in V$ ، عضو دلخواهی باشد ثابت کنید :

$$v+v=2v$$

۴- ثابت کنید برای هر $v\in V$ و هر $r\in R$ داریم :

$$r(-v)=-rv$$

۵- ثابت‌کنید درهرفضای برداری ، برای هر دوعدد حقیقی r و s و هر v_1 و v_2 داریم:

$$r(v_1-v_2)=rv_1-rv_2$$

۶- ثابت کنید :
$$\forall v\in V, \forall r\in R, rv=\bar{0} \Longleftrightarrow r=0 \lor v=\bar{0}$$

۷- آیا مجموعهٔ اعـداد گویا همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی یك فضای برداری روی R است ؟ چرا ؟

۸- ثابت کنید در هرفضای برداری برای هر $v\in V$ و هر r و s در R داریم :

$$(r-s)v=rv-sv$$

۹- نشان دهید $\{\bar{0}\}$ یك زیرفضای V است[1] .

۱۰- آیا $S=\{(x, y)|x, y\in R \text{ و } x+2y=1\}$ ، یك زیر فضای R^2 است ؟ چرا ؟

۱۱- آیا $S=\{(x, y)|x, y\in R \text{ و } x+y\sqrt{3}=0\}$ یك زیرفضای R^2 است؟ چرا ؟

۱۲- آیا $W=\{(x, y)|x, y\in R \text{ و } y=x^2\}$ ، یك زیرفضای R^2 است .

۱۳- نشان دهید هر خط راست که از مبدأ مختصات می‌گذرد یك زیر فضای R^2 است.

۱۴- نشان دهید ، $U=\{(x, y, z)|x, y, z\in R \text{ و } x+2y+z=0\}$ یك‌زیر-فضای R^3 است .

۱- این زیرفضا را معمولا به‌صورت $(\bar{0})$ نمایش داده آن را زیر فضای بدیهی V می‌خوانند.

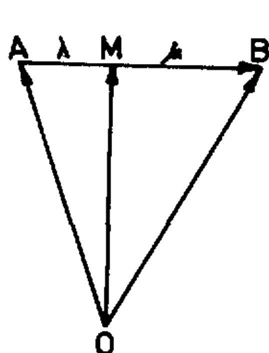
ترکیب خطی

در ریاضیات سال دوم دیدید :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

که در آن $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را بردارهای پایه خواندیم . درفضای برداری اصطلاحاً می‌گوییم $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یك ترکیب خطی از بردارهای $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است .

همچنین دیدید ، هرگاه نقطه‌ای مانند M روی $\overrightarrow{AB}$ به‌گونه‌ای باشد که



$\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (λ و μ اعداد حقیقی هستند) آن‌گاه داریم :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (\mu+\lambda)\overrightarrow{OM}$$

و یا :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\overrightarrow{OB}$$

دراینجا نیز بردار $\overrightarrow{OM}$ یك ترکیب خطی از بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ نامیده می‌شود . به‌طور کلی در این مورد تعریف زیر را می‌آوریم :

تعریف — در فضای برداری V ، اگر v_1 ، v_2 ، ... و v_n عضوهای V باشند،آن‌گاه برای هر a_1 ، a_2 ، ... و a_n در R ، عضو $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n$ از V را یك ترکیب خطی v_1 ، v_2 ، ... و v_n می‌نامیم .

از این تعریف نتیجه می‌شود که هرگاه v_1 ، v_2 ، ... v_n و v عضوهای V باشندبه‌گونه‌ای که:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \qquad (a_1 ، a_2 ، \ldots \text{ اعداد حقیقیند})$$

آن‌گاه گفته می‌شود v یك ترکیب خطی از بردارهای v_1 ، v_2 ، ... و v_n است .

مثال ۱ — الف : در R^2 ، عضو $(۰ , ۱)۳ + (۱,۰)۲$ ، یك ترکیب خطی از $(۱ , ۰)$ و $(۰,۱)$ است .

ب : در ماتریسهای ۱ × ۳ ، عضو $۵\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} + ۳\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، یك ترکیب خطی از ماتریسهای $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است .

مثال ۲ — الف : در فضای ماتریسهای ۲ × ۲ ، ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، یك ترکیب خطی از

ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است . زیرا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب : در R^2 ، عضو (۹ , ۱۶) یك ترکیب خطی از (۱ , ۲) و (۴ , ۷) است زیرا :

$$(9, 16) = 1(1, 2) + 2(4, 7)$$

ج : روشن است که همیشه می‌توان نوشت :

$$(0, 0) = 0(a, b) + 0(c, d)$$

یعنی (۰,۰) یك ترکیب خطی از بردارهای دلخواه (a,b) و (c,d) است .

با توجه به تعریف ومثالهای بالا ، اکنون سؤال زیر را مطرح می‌کنیم :

زیر مجموعه‌ای از بردارهای یك فضای برداری داده شده است :

الف : آیا می‌توان یکی از آنها را به‌صورت ترکیب خطی بقیه نوشت ؟

ب : آیا می‌توان هر برداری از این فضا را به صورت ترکیب خطی این بردارها نوشت ؟

مثال ۱ — مجموعهٔ بردارهای (۹ , ۱۶) ، (۱ , ۲) و (۴ و ۸) از فضای برداری R^2 داده شده است ، آیا می‌توان یکی از آنها را مثلاً (۹ , ۱۶) به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت ؟

فرض کنیم پاسخ به این پرسش مثبت باشد ، یعنی اعداد حقیقی x و y یافت شوند به گونه‌ای که :

$$(9, 16) = x(1, 2) + y(4, 8) \qquad (1)$$

از اینجا به دست می‌آید :

ضرب اسکالر : $(9, 16) = (x, 2x) + (4y, 8y)$

جمع در R^2 : $(9, 16) = (x + 4y, 2x + 8y)$

دراین صورت بنابر برابری زوجهای مرتب داریم :

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 8y = 16 \end{cases}$$

پس وجودتساوی (۱) یعنی وجود x و y بستگی به‌وجود جوابهای این‌دستگاه دارد. اما این دستگاه معادلات دارای جواب نیست چرا ؟ یعنی هیچ دو عدد حقیقی مانند x و y یافت نمی‌شوند که در تساوی (۱) صدق کنند ؟ یعنی در R^2 عضو (۹ , ۱۶) را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای (۱ , ۲) و (۴ , ۸) نوشت . در صورتی که در مثال ۲ بالا قسمت ب ، دیدید که (۹,۱۶) را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از (۱,۲) و (۴,۷) نوشت.

مثال ۲ ــ بردارهای (۹,۱۶) ، (۱,۲) ، (۴,۷) و (۴,۸) در $R^۲$ داده شده است ، یکی از آنها مثلاً بردار (۹,۱۶) را به صورت ترکیب خطی از بقیه یعنی بردارهای (۱,۲) ، (۴,۷) و (۴,۸) بنویسید .

فرض کنیم عددهای حقیقی x ، y و z یافت شوند به‌گونه‌ای که :

$$(۹,۱۶)=x(۱,۲)+y(۴,۷)+z(۴,۸)$$

باتوجه به مثال ۱ این دستگاه به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} x+۴y+۴z=۹ \\ ۲x+۷y+۸z=۱۶ \end{cases}$$

که از حل آن داریم : $y=۲$ و $x=۱-۴z$. دراینجا x بستگی به z دارد . بنابراین اگر $z=۰$ بگیریم ، جواب $x=۱$ ، $y=۲$ و $z=۰$ به‌دست می‌آید . اگر $z=۱$ فرض شود ، آن‌گاه $x=-۳$ ، $y=۲$ و $z=۱$ و اگر ... بدین‌ترتیب دیده می‌شود که بردار (۹ , ۱۶) در $R^۲$ را می‌توان به صورتهـای بی‌شماری به شکل ترکیب خطی از بردارهـای (۱ , ۲) ، (۴ , ۷) و (۴ , ۸) نوشت . بنابراین پاسخ به‌قسمت الف پرسش مطرح شده دربالا چنین است :

در بعضی موارد جواب مثبت و در بعضی موارد جواب منفی است یعنی جواب کلی منفی است .

برای پاسخ به قسمت ب به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۳ ــ گفتیم که :

۱ ــ هر بردار مانند $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ در صفحه را می‌توان به صورت تـرکیب خطی از بردارهـای $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نوشت .

۲ ــ هر ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از فضای ماتریسهای ۲ × ۲ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ماتریسهای $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ نوشت .

لذا امکان این‌که در یك فضای برداری ، بتوان هر عضو را به صورت ترکیب خطی ازچند بردار داده شده این‌فضا نوشت وجود دارد . اما مثال زیر نشان می‌دهد که این‌امکان همیشگی نیست.

مثال ۴ ــ آیا هر بردار (a , b) از $R^۲$ را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای (۱ , ۳ــ) و (۳ , ۹ ــ) نوشت ؟ فرض کنیم بتوانیم هـر بردار مانـند (a , b) را به صورت

زیر بنویسیم :

تعریف ترکیب خطی : (۱) $x(۱,-۳)+y(۳,-۹)=(a,b)$

از این تساوی همان‌طور که قبلاً دیدیم دستگاه زیر نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} x+۳y=a \\ -۳x-۹y=b \end{cases}$$

اما این دستگاه درحالت کلی جواب ندارد (چرا ؟) ، یعنی اعدادی مانند x و y در R وجود ندارد به‌گونه‌ای‌که تساوی (۱) برقرار باشد .

باتوجه به مثالهای اخیر ، جواب به قسمت ب پرسش مطرح شده در صفحات قبل ، گاهی مثبت و گاهی منفی است . اکنون تعریف زیر را می‌آوریم :

تعریف ـ در فضای برداری V ، گوییم بردارهای $v_۱$ ، $v_۲$ ، . . . ، و v_n بستگی خطی دارند هرگاه اعداد حقیقی $a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . ، و a_n ، که دست‌کم یکی ازآنها مخالف صفر است ، یافت شوند به‌گونه‌ای که :

$$a_۱v_۱+a_۲v_۲+\dots+a_nv_n=\bar{0}$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر بردارهای $v_۱$ ، $v_۲$ . . . ، v_n و v عضوهای V باشند وبتوان v را به‌صورت ترکیب خطی از $v_۱$ ، $v_۲$ . . . ، و v_n نوشت ، یعنی :

($a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . اعداد حقیقی هستند) $v=a_۱v_۱+a_۲v_۲+\dots+a_nv_n$

آن‌گاه گوییم v با بردارهای $v_۱$ ، $v_۲$ . . . ، و v_n بستگی خطی دارد .

مثال ـ ۱ ـ بردارهای $(۱,۲,۰)$ ، $(۲,-۱,۲)$ و $(۴,-۷,۶)$ در $R^۳$ بستگی‌خطی‌دارند. زیرا داریم :

$$۲(۱,۲,۰)-۳(۲,-۱,۲)+۱(۴,-۷,۶)=(۰,۰,۰)$$

۲ ـ بردارهای $(۱,۰,۰)$ و $(۰,۲,۰)$ و $(۰,۰,۳)$ بستگی خطی ندارند . زیرا از :

$$a_۱(۱,۰,۰)+a_۲(۰,۲,۰)+a_۳(۰,۰,۳)=(۰,۰,۰)$$

نتیجه می‌شود $a_۱=۰$ ، $a_۲=۰$ ، $a_۳=۰$. یعنی تمام ضرایب صفر است .

تعریف ـ در فضای برداری V گوییم بردارهای $v_۱$ ، $v_۲$ ، . . . ، و v_n استقلال خطی دارند (یا مستقل خطی هستند) ، هرگاه بستگی خطی نداشته باشند . به عبارت دیگر از :

($a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . اعداد حقیقی هستند) $a_۱v_۱+a_۲v_۲+\dots+a_nv_n=\bar{0}$

نتیجه شود : $a_۱=a_۲=\dots=a_n=۰$

دراین صورت مجموعهٔ $\{v_۱ ، v_۲ \dots v_n\}$ را مجموعهٔ مستقل خطی می‌نامند .

مثال ـ ۱ ـ در فضای بردارهای صفحه ، بردارهای پایه مستقل خطیند . زیرا ، اگر

$$a_1 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

[illegible] $a_1 = \cdots = a_2$ [illegible]

۲ ـ در فضای برداری [illegible] (x) [illegible] (چندجمله‌ایهای با درجهٔ کمتر از ۳) ، مثلاً ۱ ، x و x^2 مستقل خطی‌اند ، زیرا اگر [illegible]

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = \overline{0} \cdots$$

[illegible] $a_1 = \cdots$ [illegible]

۳ ـ در فضای R^2 بردارهای [illegible] و (۱,۲) [illegible] بستگی خطی ندارند یعنی مستقل خطیند .

تمرین

۱ ـ در فضای برداری R^2 ، بردار (۲,۳) را ، هرجا که امکان دارد ، به صورت ترکیب خطی از بردارهای داده شده زیر بنویسید .

الف ـ (۱,۲) , (−۱,۳) ؛ ب ـ (۱,۰) , (۰,۱) ؛ ج ـ (۳,۵) , [illegible]

د ـ (۳,۴) ؛ ه ـ (۱,۰), (۰,۱) , (۲,۱) ؛ و ـ (۱,۲) , [illegible]

۲ ـ در فضای برداری R^3 ، بردار (۴,۱,۰) را ، هر جا که امکان دارد ، به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای داده شده زیر بنویسید .

الف ـ (۲,۱,۲) , (۱,۲,۱) , (۰,۱,۰)

ب ـ (−۱,۲,۳) , (−۱,۳,۲) , (۱,−۲,۳)

ج ـ (۱,۱,۱) , (−۱,۱,−۱)

د ـ (۱,۰,۰) , (۰,۱,۰) , (۰,۰,۱)

۳ ـ درفضای برداری R^2 ، از دسته بردارهای داده شده زیر ، کدام یك بستگی خطی دارد . دلیل بیاورید .

الف ـ (۲,۳) , (۳,۲) ؛ ب ـ (۳,۲) , $\left(-\frac{۳}{۲}, -۱\right)$

ج ـ (۲,۳) , (۳,۲) , (۱,۱) ؛ د ـ $(۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}), (۲\sqrt{۵}, ۳\sqrt{۵}), (\sqrt{۳}, \sqrt{۵})$

۴ ـ در فضای برداری R^3 ، از دسته بردارهای داده شده زیر ، کدام یك بستگی خطی دارد . دلیل بیاورید .

الف ـ (۲,۱,۳) , (۱,۰,۲) ؛ ب ـ (۲,۱,۳) , (۱,۰,۲) , (۳,۲,۴)

ج ـ (۲,۱,۳) , (۱,۲,۰) ؛ د ـ (۳,۲,۴) , (۰,۱,۰)

۵ ـ ثابت کنید درفضای برداری R^2 ، هر سه بردار متمایز یا بیشتر بستگی خطی‌دارند.

۶ ـ در فضای برداری $M_{2\times 2}$ ، آیا $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ بستگی خطی دارند ؟ دلیل بیاورید .

۷ ـ آیا ماتریسهای زیر :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲/۵ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بستگی خطی دارند ؟

۸ ـ در فضاهای R^2 و R^3 ، از دسته بردارهای داده شدهٔ زیر ، کدام‌یك استقلال خطی دارد . دلیل بیاورید .

الف ـ $(۱,۰,۰) , (۵,-۴,۳) , (۰,۱,۰) , (۰,۰,۱)$

ب ـ $(۲,-۳) , \left(-\frac{۲}{۳}, ۱\right)$

ج ـ $(۵,-۴,۳) , (۱,۱,۱) , (۰,۲,۱)$

د ـ $(۲,۳) , (۴,۵)$

۹ ـ عضوهای کدام یك از مجموعه‌های زیر ، استقلال خطی دارند .

الف : $\{۱ , t , ۲-۳t\}$ ؛ ب : $\{۲^x , ۲^{-x}\}$

۱۰ ـ نشان دهید که در هر فضای برداری :

الف ـ عضوهای هر زیرمجموعه که شامل $\bar{0}$ باشند بستگی خطی دارند .

ب ـ اگر $v \neq \bar{0}$ ، آن‌گاه $\{v\}$ مستقل خطی است .

جبر کلیدی

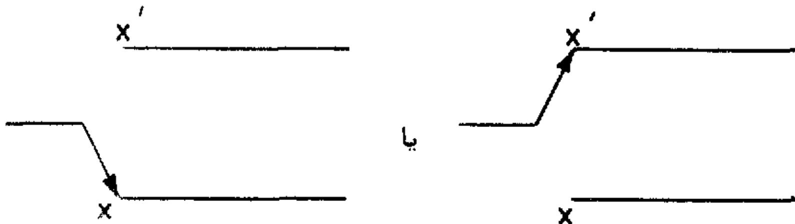
مداری را که شامل مولد، کلید، لامپ و سیم رابط است درنظر بگیرید، می‌دانید که چهار عامل در روشن شدن لامپ دخالت دارد. ۱- مولد کار کند. ۲- لامپ نسوخته باشد. ۳- مقاومت لامپ متناسب با ولتاژ مولد باشد. ۴- کلید سالم باشد. دراین بخش هرجا اسمی از مدار برده می‌شود فرض براین است که عوامل فوق موجود بوده و آنچه مورد توجه ماست نکات زیر می‌باشد:

باز و بسته بودن کلید یا کلیدها، تعداد کلیدها در یک مدار، نحوهٔ قرار گرفتن کلیدها در مدار، طرح‌ریزی یک مدار برای هدف خاص و بالاخره کم کردن تعداد کلیدها دریک مدار به منظور کاستن هزینه بدون ایجاد کاستی در کار مدار.

نمایش کلیدها - برای نمایش کلیدها در حالت کلی از حروف الفبای لاتین x، y و z،.. یا A، B، .. استفاده می‌شود. ساده‌ترین مدارها آنهایی هستند که شامل یک کلید می‌باشند. این مدارها را به یکی از صورتهای زیر نشان می‌دهند.



می‌دانیم که هر کلید برق دارای دو وضع است، یا بسته است (جریان برق از آن می‌گذرد) یا باز است (جریان از آن نمی‌گذرد). دریک مدار اگر دو کلید چنان باشند که وقتی یکی باز است دیگری بسته باشد و بالعکس، آن‌گاه اگر یکی را به x نمایش دهیم دیگری را با x' مشخص خواهیم ساخت. شکلهای زیر چنین حالتی را نشان می‌دهد.



ارزش کلیدها - همانطور که برای گزاره‌ها ارزش درستی قائل شدیم، برای کلیدها نیز ارزش

قائل می‌شویم؛ بدین‌ترتیب که اگر کلیدی بسته باشد گوییم ارزش آن ۱ است و اگر باز باشد ارزش آن ۰ است . بنابراین حروفی که برای نمایش کلیدها به کار می‌بریم **متغیرهایی** هستند که تنها می‌توانند مقادیر ۱ یا ۰ را اختیار کنند.

x
۱
۰

کلیدی را که همواره باز است به ۰ و کلیدی را که همواره بسته است به ۱ نشان می‌دهیم، پس ۰ و ۱ نمایش کلیدهای ثابت هستند.

بنابر آنچه گفته شد، x و x' دارای ارزشهای مختلفند ، یعنی $x=0$ فقط وفقط وقتی که $x'=1$ جدول ارزش x' باتوجه به ارزش x چنین است

x	x′
۰	۱
۱	۰

ترکیب کلیدها ـ راههای مختلفی برای ترکیب کردن (اتصال) کلیدها وجود دارد . ما چند نمونهٔ سادهٔ آنها را در زیر می‌آوریم .

ترکیب (اتصال) متوالی ـ شکل زیر ترکیب دو کلید x و y را به‌صورت متوالی نشان می‌دهد.

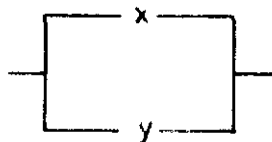


دراین اتصال وجود یا عدم وجود جریان بستگی به باز وبسته‌بودن دو کلید باهم دارد مدار حاصل ازترکیب متوالی کلید x و y را به $x \cdot y$ یا xy نشان می‌دهیم . جدول ارزش این مدار باتوجه به ارزشهای x و y چنین است .

x	y	x·y
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

ملاحظه می‌شود که این جدول درست مثل جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزاره است . همچنین این جدول نشان می‌دهد که جریان فقط در وضع اول (سطر اول) وجود دارد .

ترکیب (اتصال) موازی ـ شکل زیر اتصال دو کلید x و y را به صورت موازی نشان می‌دهد .

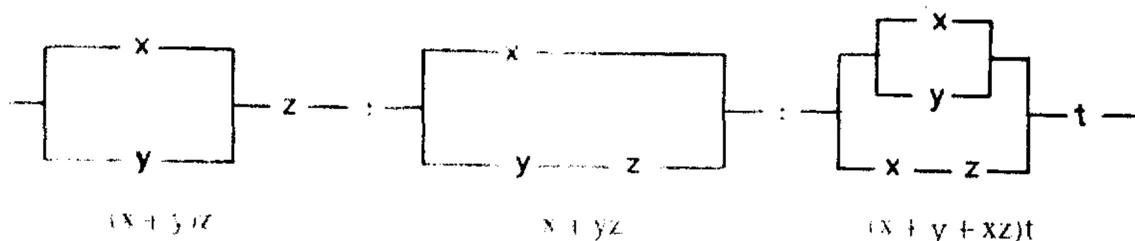


مدار حاصل از اتصال موازی دو کلید x و y را به $x + y$ نشان می‌دهیم . جدول ارزش درستی این مدار چنین است :

x	y	x+y
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۰

ملاحظه می‌شود که این جدول نیز درست مانند جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزاره است. همچنین این جدول نشان می‌دهد که جریان فقط در وضع آخر (سطر آخر) وجود ندارد و در سایر اوضاع (سطرها) جریان در مدار جاری است .

می‌توان مدارهای حاصل از دو اتصال متوالی و موازی را نیز باهم ترکیب کرد و مدارهای پیچیده‌تری به دست آورد . در زیر چند نمونه از این مدارها نشان داده شده است .

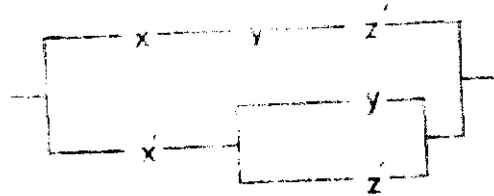


$(x+y)z$ $\qquad$ $x+yz$ $\qquad$ $(x+y+xz)t$

طبق قراردادی که در مورد نمایش کلیدهای متوالی و موازی کلیدها گذاشتیم مدارهای فوق از چپ به راست به ترتیب با عبارات $(x+y)z$ و $x+yz$ و $(x+y+xz)t$ مشخص می‌شوند .

همانطوری که ملاحظه می‌شود ... و بالعکس به هر ...
... مدارهای + و . باشند ...

مثلاً مدار متناظر با عبارت $xyz' + x'(y + z')$ بصورت زیر است :

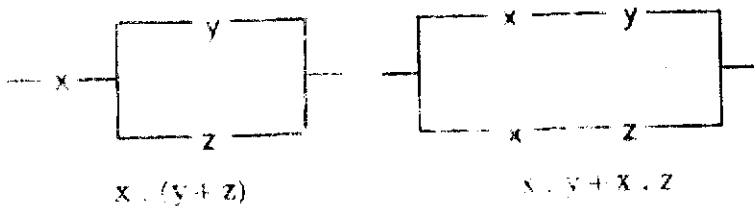


تعریف ۱ ـ عبارتی که متناظر با یک مدار ... عبارت بولی یا تابع بولی ... نامیده می‌شود .

تابع بولی مدار بالا عبارت است از $f = xyz' + x'(y + z')$ اگر $f = 1$ باشد ... **جریان عبور می‌کند و اگر $f = 0$ باشد مدار** فاقد جریان است .

تعریف ۲ ـ **دومدار را معادل گوییم هرگاه** برای هردسته از حالات کلیدها، هردومدار بسته ... (جریان ازآن عبورکند) ویاهردو مدار باز (جریان درآن متوقف باشد) باشند به عبارت دیگر دومدار را معادل **گوییم هرگاه هردو در یک وضع باشند .**

درزیردومدار معادل رسم شده است .



$x \cdot (y + z)$ $\qquad$ $x \cdot y + x \cdot z$

درمدار سمت چپ، اولا درحالتی که کلید x بسته است اگر کلید y یا z بسته ... جریان ازمدارعبورمی‌کند، ولی اگر y و z باهم باز باشند مدار فاقد جریان است . ثانیاً درحالتی که کلید x باز است جریان درمدار متوقف است .

مدار سمت راست نیز درهمین‌وضع است یعنی اولا درحالتی که کلید x بسته است اگر کلید y یا z بسته باشد جریان ازمدار عبور می‌کند ولی اگر y و z باهم باز باشند مدار فاقد جریان است . ثانیاً درحالتی که کلید x باز است جریان در مدار متوقف است.

توضیحات فوق در جدولهای زیر نمایان است .

x	y	z	xy	xz	$xy + xz$
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰

x	y	z	$x + z$	$x.(y + z)$
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۰

جدولها نشان می‌دهند که دو عبارت بولی $x.(y + z)$ و $xy + xz$ هم‌ارزشند .

تعریف ۳ ـ دو عبارت بولی را مساوی گوییم هرگاه مدارهای متناظر آنها معادل یا جدولهای آنها هم‌ارزش باشند .

دو عبارت بولی هم ارزش بالا ، یعنی $x(y + z)$ و $xy + xz$ با هم مساویند . این تساوی را به صورت زیر نشان می‌دهیم :

$$x(y + z) = xy + xz$$

به خصوص دوکلید x و y که باهم باز و با هم بسته می‌شوند به صورت $x = y$ نشان‌می‌دهیم.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که تنها ویژگیهایی در مدارها مورد توجهند که مربوط به‌باز و بستن کلیدها باشند، به‌عبارت دیگر ، در مدارها عواملی مورد بررسیند که تعیین‌می‌کنند چه موقع جریان در مدار وجود دارد یا چه موقع جریان متوقف است . بنابراین ما در مدارها به کمیتهایی مانند ، مقاومت ، شدت جریان ، زمان ، ... توجه نداریم .

جبر کلیدی ـ هر یك از اتصالهای متوالی و موازی عملی را در مجموعهٔ کلیدها تعریف می‌کنند که ما آنها را به ترتیب به . و + نشان دادیم .

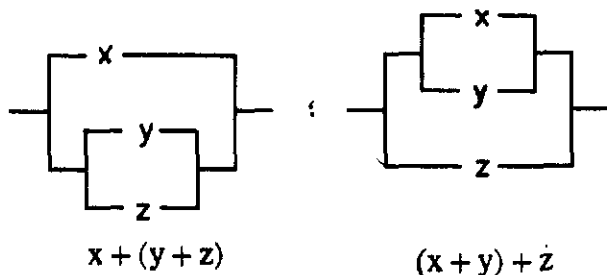
مجموعهٔ کلیدها ، همراه با دو عمل . و + که دارای خاصیتهای زیر می‌باشند ، یك دستگاه ریاضی تشکیل می‌دهد که به نام جبر کلیدی نامیده می‌شود .

۱ ـ شرکت‌پذیری ـ هر یك از اعمال . و + در مجموعهٔ کلیدها شرکت‌پذیرند؛ یعنی برای هر x و y و z داریم :

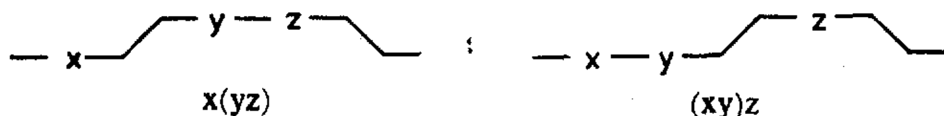
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



$x + (y + z)$ ؛ $(x + y) + z$



$x(yz)$ ؛ $(xy)z$

و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌هاست .

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

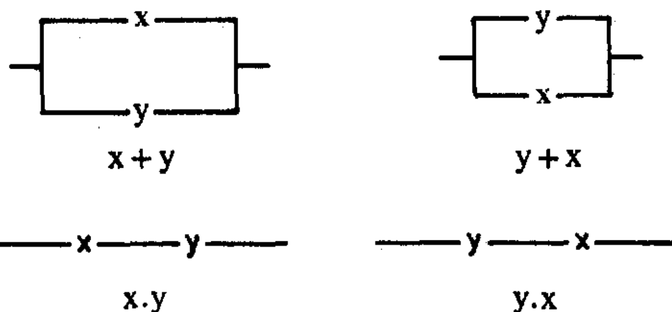
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

۲ ــ **جابجائی** ـ هریك از اعمال . و + درمجموعهٔ کلیدها دارای خاصیت جابجائی هستند، یعنی برای هر کلید x و y داریم :

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



$x + y$ ؛ $y + x$

$x.y$ ؛ $y.x$

و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌ها می‌باشند ٠

$$X \cup Y = Y \cup X$$

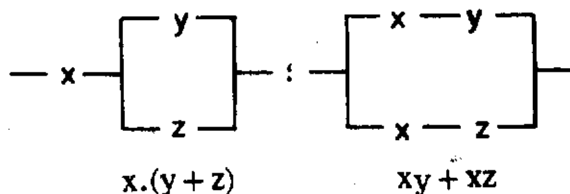
$$X \cap Y = Y \cap X$$

۳ــ پخشی (توزیع‌پذیری) ـ هریك ازعملهای . و + نسبت به‌دیگری‌توزیع پذیر است.
یعنی برای هر x و y و z داریم :

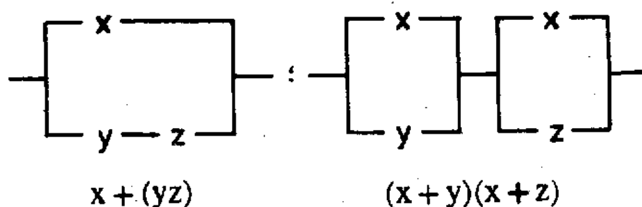
$$x(y+z) = xy + xz$$

$$x + (yz) = (x+y)(x+z)$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



$x.(y+z)$ ؛ $xy + xz$



$x + (yz)$ ؛ $(x+y)(x+z)$

و نظیر تساویهای زیر در مجموعه‌ها هستند .

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

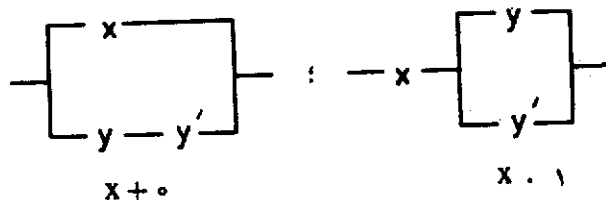
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

۴ ـ **عضوهای بی‌اثر** (کلیدهای ثابت) ـ برای هر کلید x داریم :

$$x + \circ = x$$

$$x \, . \, ۱ = x$$

که مدارهای آنها به صورت زیر است :



$x + \circ$ ؛ $x \, . \, ۱$

ونظیر تساویهای زیر درمجموعه‌ها هستند :

$$X \cup \varnothing = X$$

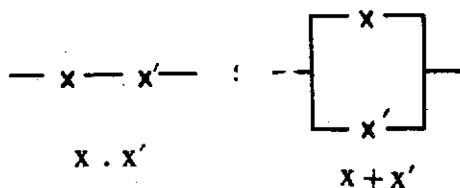
$$X \cap M = X$$

۵ ـ متمم‌گیری ـ برای‌هر کلید x ، کلیدی مانند x' داریم به‌گونه‌ای‌که :

$$x \cdot x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

که مدارآنها به صورت زیراست :



ونظیر تساویهای زیر درمجموعه‌ها می‌باشند :

$$X \cap X' = \varnothing$$

$$X \cup X' = M$$

به‌طورکلی هرمجموعهٔ غیرتهی B همراه با دو عمل . و $+$ (. و $+$ و B) که دارای خواص زیرباشد:

B_1 ـ **شرکت پذیری :**

$$\forall x, y, z \in B, \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z$$

B_2 ـ **جابجایی :**

$$\forall x, y \in B, \quad x + y = y + x, \quad xy = yx$$

B_3 ـ **پخشی :**

$$\forall x, y, z \in B, \quad x.(y + z) = xy + xz, \quad x + (yz) = (x + y)(x + z)$$

B_4 ـ **عضوهای بی‌اثر** ـ عضوهای ۰ و ۱ موجودند به گونه‌ای‌که.

$$\forall x, \quad x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

B_5 ـ **متمم گیری :**

$$\forall x \in B, \exists x' \in B, \quad x + x' = 1, \quad xx' = 0$$

به نام یك جبر بول خوانده می‌شود . این نامگذاری به خاطر ریاضی‌دان انگلیسی جرج بول (۱۸۱۵-۱۸۶۴) است که از این دستگاهها برای اولین بار برای مطالعهٔ مجموعه‌ها و منطق استفاده کرد . جبر کلیدی ، همان طور که دیدیم دارای خواص پنجگانه بالاست ؛ و مثالی از جبر بول است .

مثال ۱ـ مجموعهٔ گزاره‌ها همراه بااعمال $\wedge$ و $\vee$ یك جبر بول است .

(دو عبارت منطقی P و Q را معادل نامند هرگاه ارزشهای درستی آنها یکی باشد . این دو عبارت معادل را به‌صورت $P \equiv Q$ نشان می‌دهند . بنابراین $\equiv$ یك نوع تساوی‌منطقی است .)

هرگاه p ، q و r سه گزاره و T یك گزارهٔ درست و F یك گزارهٔ نادرست باشد با استفاده از جدول درستی گزاره‌ها می‌توان درستی هم‌ارزیهای زیر را نشان داد .

۱ ـ شرکت‌پذیری:

$$\forall p, q, r \qquad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$q \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

۲ ـ جابجائی

$$\forall p, q \qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۳ـ پخشی

$$\forall p, q, r \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

۴ـ عضوهای بی‌اثر : برای هر گزارهٔ p داریم :

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge T \equiv p$$

۵ ـ متمم‌گیری: برای هر گزاره p داریم :

$$p \vee (\sim p) \equiv T$$

$$p \wedge (\sim p) \equiv F$$

یعنی هرگاه P مجموعهٔ گزاره‌ها باشد ، دستگاه $(P, \vee, \wedge)$ یك جبر بول است .

مثال ۲ ـ برای‌هرمجموعهٔX، اگرمجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های‌آن‌را(مجموعه توانیX) به $P(X)$ نشان دهیم دستگاه $(P(X), \cup, \cap)$ یك جبربول است. زیرا همان‌طوری‌که دیدید :

۱ ـ شرکت پذیری :

$$\forall A, B, C \in P(X), \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

۲ ـ جابجائی

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{و} \quad A \cap B = B \cap A$$

۳ ـ پخشی

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{و} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

۴ ـ عضوهای بی‌اثر : برای هر A داریم :

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap M = A$$

۵ ـ متمم‌گیری : برای هر A داریم :

$$A \cup A' = M$$
$$A \cap A' = \varnothing$$

بنابراین $(P(X), \cup, \cap)$ یك جبر بول است .

چند قضیه برای ساده‌کردن مدارها

درجبر مجموعه‌ها دیدیم که برای هردو مجموعهٔ A وB داریم :

$$A \cap A = A \quad ، \quad A \cup A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad ، \quad A \cup M = M$$
$$A \cap (A \cup B) = A \quad ، \quad A \cup (A \cap B) = A$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad ، \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A')' = A \quad \text{و} \quad \varnothing' = M \qquad M' = \varnothing$$

قضایای زیرنشان‌می‌دهدکه این احکام‌درهرجبربول ودرنتیجه درجبرکلیدی نیزدرست‌است

قضیهٔ ۱ ـ اگر $(B, +, \cdot)$ یك جبر بول باشد، آن‌گاه برای هرb متعلق به B داریم :

الف ـ $b + b = b$

ب ـ $b \cdot b = b$

برهان ـ اگرb عضو دلخواه B باشد چنین می‌نویسیم :

الف ـ

$$b+b=(b+b)\cdot 1$$ بنا به B_4 :

$$=(b+b)\cdot(b+b')$$ بنا به B_5 :

$$=b+(bb')$$ بنا به B_3 :

$$=b+0$$ بنا به B_5 :

$$=b$$ بنا به B_4 :

ب ـ

$$b\cdot b=b\cdot b+0$$ بنا به B_4 :

$$=b\cdot b+b\cdot b'$$ بنا به B_5 :

$$=b\cdot(b+b')$$ بنا به B_3 :

$$=b\cdot 1$$ بنا به B_5 :

$$=b$$ بنا به B_4 :

قضیه۲ ـ اگر $(B,+,\cdot)$ یك جبر بول باشد ،آن‌گاه برای هر b متعلق به B داریم :

الف ـ $b+1=1$

ب ـ $b\cdot 0=0$

برهان ـ فرض‌کنیم b عضو دلخواهی از B باشد چنین می‌نویسیم :

الف ـ

$$b+1=(b+1)\cdot 1$$ بنا به B_4 :

$$=(b+1)(b+b')$$ بنا به B_5 :

$$=b+(1\cdot b')$$ بنا به B_3 :

$$=b+b'$$ بنا به B_4 :

$$=1$$ بنا به B_5 :

ب ـ

$$b\cdot 0=(b\cdot 0)+0$$ بنا به B_4 :

$$=(b\cdot 0)+(bb')$$ بنا به B_5 :

$$=b\cdot(0+b')$$ بنا به B_3 :

$$=b\cdot b'$$ بنا به B_4 :

$$=0$$ بنا به B_5 :

قضیهٔ ۳ ـ در هر جبر بول برای هر a و b متعلق به B داریم :

الف ـ $a \, . \, (a+b) = a$

ب ـ $a + (a \, . \, b) = a$

برهان :

الف ـ

$a . (a+b) = (a+۰) \, . \, (a+b)$ بنابه $B_{۴}$:

$= a + (۰b)$ بنابه $B_{۳}$:

$= a + ۰$ بنابه قضیهٔ ۲ :

$= a$ بنابه $B_{۴}$:

ب ـ

$a + (a \, . \, b) = (a \, . \, ۱) + (a \, . \, b)$ بنابه $B_{۴}$:

$= a . (۱+b)$ بنابه $B_{۳}$:

$= a \, . \, ۱$ بنابه قضیهٔ ۲ :

$= a$ بنابه $B_{۴}$:

قضیهٔ ۴ ـ درهرجبر بول، عضو a' متناظر با عضو a منحصر به‌فرد است .

برهان ـ فرض‌کنیم غیراز a'، عضودیگری‌مانند $a_{۱}$ نیزمتناظرباعضوa است‌به‌گونه‌ای‌که:

$$a + a_{۱} = ۱ \quad و \quad a \, . \, a_{۱} = ۰$$

نشان می‌دهیم‌که $a' = a_{۱}$. برای این‌منظور می‌نویسیم :

$a' = ۱a'$ بنابه $B_{۴}$:

$= (a + a_{۱})a'$ بنابه‌فرض :

$= (aa' + a_{۱}a')$ بنابه $B_{۳}$:

$= ۰ + a_{۱}a'$ بنابه $B_{۵}$:

$= a_{۱}a + a_{۱}a'$ بنابه‌فرض :

$= a_{۱}(a + a')$ بنابه $B_{۳}$:

$= a_{۱} \times ۱$ بنابه $B_{۵}$:

$= a_{۱}$

قضیهٔ ۵ ـ در جبر بول برای هر a داریم :

$$(a')' = a$$

برهان ـ می‌دانیم که :

$$a' + a = ۱$$

$$a' + (a')' = ۱$$

به همین ترتیب $a' a = \circ$ و $(a')' a' = \circ$ پس طبق قضیهٔ ۴ ، $a = (a')'$

قضیهٔ ۶ ـ در هر جبر بول $\circ = ۱'$ و $۱ = \circ'$

برهان ـ طبق قضیهٔ ۲ داریم (یا بنابه B_5) :

$$۱ + \circ = ۱$$

و چون بنابه B_5 نیز داریم:

$$۱ + ۱' = ۱$$

همچنین داریم :

$۱ . \circ = \circ$ چرا ؟

$\circ' . \circ = \circ$ چرا ؟

با توجه به‌قضیهٔ ۴ ، نتیجه می‌شود $\circ = ۱'$ و $۱ = \circ'$.

قضیهٔ ۷ ـ (توانین دمورگان) ـ در جبربول برای هر a و b داریم :

الف ـ $(ab)' = a' + b'$

ب ـ $(a + b)' = a'b'$

برهان : الف ـ داریم:

$(ab)(a' + b') = (ab)a' + (ab)b'$ بنابه B_4 :

$= (aa')b + a(bb')$ بنابه B_1 و B_2 :

$= \circ b + a\circ$ بنابه B_5 :

$= \circ + \circ$ بنابه‌قضیهٔ ۲ :

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $ab + (a' + b') = ۱$

طبق قضیهٔ ۴ ، $a' + b'$ همان $(ab)'$ است :

$$(ab)' = a' + b'$$

ب ـ داریم :

$(a + b) . a'b' = a . (a'b') + b(a'b')$ چرا ؟

$= (aa')b' + a'(bb')$ چرا ؟

$= \circ b' + a' \circ$ چرا ؟

$= \circ + \circ$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(a + b) + a'b' = ۱$

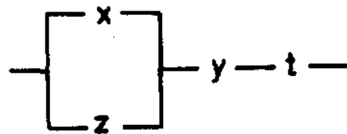
بنابه قضیهٔ ۴ ، $a'b'$ همان $(a + b)'$ است :

$$(a + b)' = a'b'$$

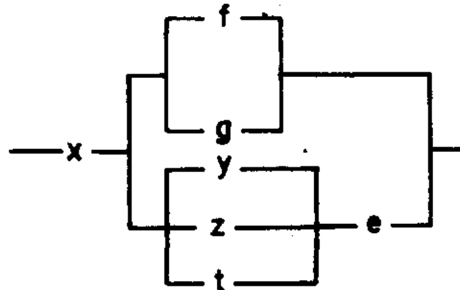
این قضایا درجبر گزاره‌ها نیز درست است

چند مثال : ۱ـ مدار عبارت بولی $(x+z)yt$ را رسم کنید.

حل ـ



۲ـ مدار زیر داده شده است عبارت بولی آن‌را بنویسید .



حل ـ طبق آنچه گفته شد داریم : $x[(f+g)+(y+z+t)e]$

۳ـ عبارات زیر را با استفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) ساده کنید :

الف ـ $xy+[(x+y')y]'$

ب ـ $\{([x'y']'+z).(x+z)\}'$

حل :

الف ـ بنابه قضیهٔ ۷: $xy+[(x+y').y]'=xy+[(x+y')'+y']$

بنابه قضیهٔ ۵و۷ : $=xy+(x'y+y')$

بنابه B_3 : $=xy+[(x'+y').(y+y')]$

بنابه B_5 : $=xy+[(x'+y').۱]$

بنابه B_4 : $=xy+(x'+y')$

بنابه قضیهٔ ۷ : $=xy+(xy)'$

بنابه B_5 : $=۱$

ب ـ بنابه قضیهٔ ۷ : $\{([x'y']'+z).(x+z)\}'=[(x'y')'+z]'+(x+z)'$

بنابه قضیهٔ ۵و۷ : $=[(x+y)+z]'+x'z'$

بنابه قضیهٔ ۷ : $=(x+y)'.z'+x'z'$

بنابه قضیهٔ ۷ : $=x'y'.z'+x'z'$

بنابه B_3 : $=x'z'(y'+۱)$

بنابه قضیهٔ ۲ : $=x'z'.۱$

بنابه B_4 : $= x'z'$

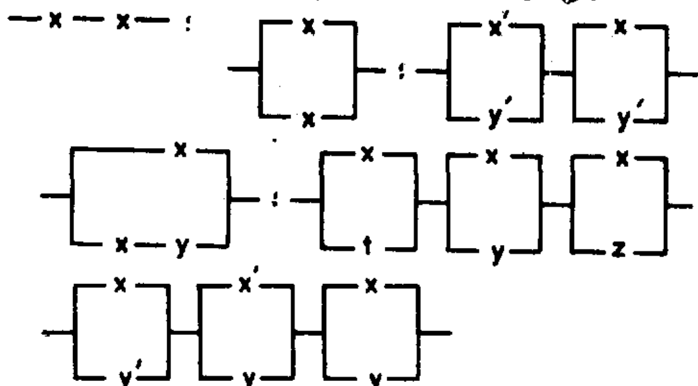
تمرین

۱ ـ مدار هر یك از عبارات بولی زیر را رسم کنید :

$t(x+y)(z+t)$ ، $x+y(x+z)$ ، $y+yz(t+x)$

$\{[(x+y)z+xy]z+z\}t+xzt$ ، $tx(yz+xr)+z$

۲ ـ عبارات بولی هر یك از مدارهای زیر را بنویسید .



۳ ـ بااستفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) عبارات زیر را ساده یاتساویهارا ثابت کنید .

$x(x+y)(y+z)$ ، $x+xy+y$ ، $x(x+1)$

$xy(x'+y')$ ، $x'y(x+y)$ ، $(x+1)(x+1)(x+1)$

$(x+y+z)'=x'y'z'$ و $(xyz)'=x'+y'+z'$

$(x+y+z+t')(x+y+z+t)$ ، $(a+b+x'+y'+z')(a+b+xyz)$

$(a+b'+c')(a+bc)$ ، $\{[(x+y)z+xy]z+z\}t+xzt$

$(a+b+c+d')(a+b+c+d)(a'+b+c')(a+b')$ ،

$x'yz+xy'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z+x'y'z'$

۴ ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید :

$(a+b).(a'+b')=a'b+ab'$ ، $ab+ab'=a$

$(a+b)+ab'=a+b$ ، $(a'+b').(a'+b)=a'$

$abc+ab'c+ac'=a$ ، $ab+ab'+a'b=a+b$

$(a+b)[(a'+b')(a'+b)]=b.a'$ ، $abc+a'c+b'c=c$

۵ ـ بدون استفاده از قانون دمورگان ثابت کنید:

$a'b'\times(a+b)=0$ و $(a+b)+a'b'=1$

۶ ـ با استفاده از مسئلهٔ د ، $(a+b)'=a'b'$ را ثابت کنید.

۷ - ثابت کنید : $(a'+b')' \times (ab)' = 0$ ؛ $(a'b')' + (a+b)' = 1$

۸ - ثابت کنید : $(ab+ac+a'x'y)(ab'c+a'x'y'+a'by') = ab'c$

۹ - ثابت کنید :
$x(x'+y)+y(y+z)+y=y$

۱۰ - متمم هر یك از عبارات زیر را نوشته آن را ساده نمایید :

$(x+y)(x'+y)(x'+y')$ ، $(x+y+z)(x'+y'+z')$

$(x'+y'+z)(x'+y'+z')$

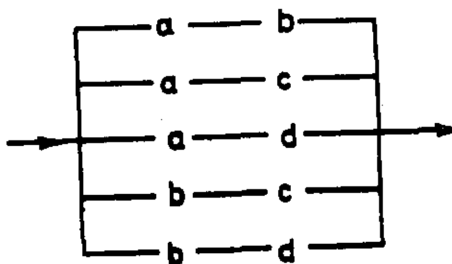
به طوری که دیدید جبر کلیدی یك جبر بول است و ما برای آن که مطلب را درحالت کلی بحث کرده باشیم قضایای قبل را در جبر بول ثابت کردیم . ولی این قضایا مربوط به جبر کلیدی نیز می‌باشد و ما از آنها در دو مورد زیر استفاده می‌کنیم :

۱ - ساده کردن یك مدار داده شده

۲ - طرح یك مدار با ویژگیهای خواسته شده

ساده کردن مدارها - ساده‌کردن مدارها اغلب با روش‌آزمایش و خطا صورت می‌گیرد. یك مهندس کارآزموده و ماهر در نتیجهٔ تجربه‌هایی که به دست آورده است می‌تواند به نحو قابل ملاحظه‌ای مدارهایی را که قبلا نمونه‌های آنها را دیده است ساده نماید . اما برای ساده کردن مدارهای پیچیده درکامپیوتر روشهایی وجوددارد که ازبحث ما خارج‌است . روش‌عمومی برای ساده کردن یك مدار این است‌که ابتدا عبارت بولی مدار داده شده را به دست می‌آوریم سپس با استفاده ازقوانین جبربول‌آنها را تا جایی‌که ممکن‌است ساده می‌کنیم آن‌گاه مدارعبارت ساده شده را رسم می‌کنیم .

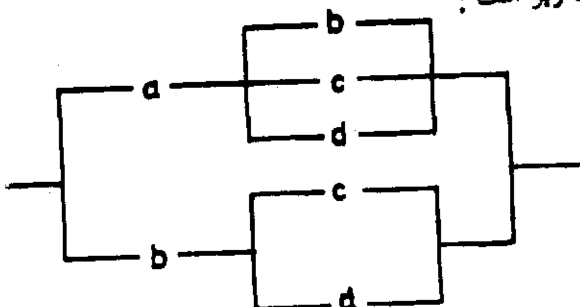
مثال ۱ - مدارزیر را ساده‌کنید.



حل - عبارت بولی این مدارعبارت است :

$$ab+ac+ad+bc+bd$$

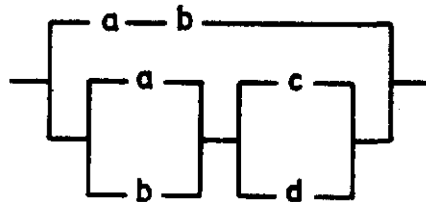
این عبارت باتوجه‌به قوانین خوانده شده به‌صورت $a(b+c+d)+b(c+d)$ نوشته می‌شودکه مدارآن به صورت زیر است :



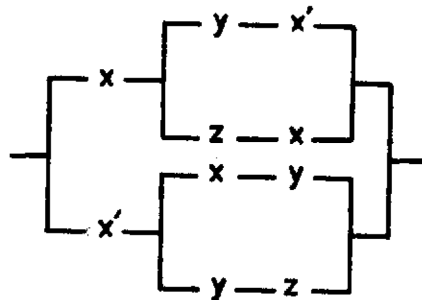
کار این‌مدار با مدارقبلی یکی بوده ولی تعدادکلیدهای آن‌کمتر است . عبارت فوق رابه صورت زیر نیز می‌توان ساده‌کرد

$$ab + ac + ad + bc + bd = ab + (a + b)(c + d)$$

که مدارآن درزیر رسم‌شده است . تعدادکلیدها دراین مدار به ۶کلید تقلیل یافته است



مثال ۲ ـ مدارزیر را ساده‌کنید .



حل ـ هرگاه عبارت بولی مدار را به T نشان دهیم خواهیم داشت :

$$T = x(yx' + zx) + x'(xy + yz)$$

$$= x(yx') + x(zx) + x'(xy) + x'(yz) \qquad : B_3$$

$$= x(x'y) + x(xz) + x'(xy) + x'(yz) \qquad : B_1$$

$$= (xx')y + (xx)z + (x'x)y + x'(yz) \qquad : B_2$$

$$= 0y + xz + 0y + x'(yz)$$ چرا ؟

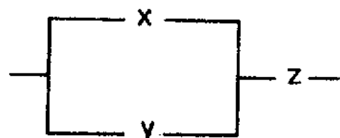
$$= 0 + xz + x'yz$$ چرا ؟

$$= (x + x'y)z$$ چرا ؟

$$= [(x + x')(x + y)]z$$ چرا ؟

$$= (x + y)z$$ چرا ؟

و مدار آن در زیر رسم شده است .



طرح‌ریزی مدارها ـ طرح‌ریزی یك مدار با ویژگیهای خواسته شده نظیر پیدا کردن گزاره‌ای است که جدول ارزش آن داده شده است . برای طرح یك مدار بـه ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ـ جدولی‌تنظیم‌می‌کنیم که‌حالات ممکنه‌را برای هرکلید در مدار مورد نظرمشخص‌کند.

۲ـ پس از تنظیم جدول ، تابع بولی آن را می‌نویسیم .

۳ـ تابع به دست آمده را با استفاده از قوانین جبر کلیدی (جبر بول) ساده می‌کنیم .

۴ـ مدار تابع ساده شده را رسم می‌کنیم .

مثال ۱ ـ می‌خواهیم لامپی را در یك راه پله به گونه‌ای نصب کنیم که این لامپ به وسیلهٔ دو کلید یکی در پایین و دیگری در بالای پلکان روشن و خاموش شود . مدار لازم را طرح نمایید .

حل ـ ۱ ـ تنظیم جدول : این دو کلید را به x و y نشان داده مدار را طوری شروع می‌کنیم کـه وقتی هر دو کلید بسته باشد لامپ روشن گردد (یا می‌توان طوری شروع کرد که وقتی هر دو کلید بسته باشد لامپ خاموش باشد) . تابع بولی مدار را T نامیده برای آن جدول درستی به صورت زیر تنظیم می‌کنیم :

ـ در شروع فرض کردیم وقتی هر دوکلید بسته است ($x = ۱$ و $y = ۱$) ، لامپ روشن باشد . در این صورت داریم $T = ۱$ (سطر اول) .

ـ کلید x را بسته نگهداشته ($x = ۱$) ولی کلید y را باز می‌کنیم ($y = ۰$) دراین صورت لامپ خاموش‌خواهد شد و داریم $T = ۰$ (سطر دوم جدول) .

ـکلید y را بسته نگهداشته ($y = ۱$) ولی کلید x را باز می‌کنیم ($x = ۰$) در این صورت لامپ خاموش خواهد شد و داریم $T = ۰$ (سطر سوم جدول) .

x	y	T
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

ـ بالاخره هر دوکلید x و y را با هم باز می‌کنیم ($x = ۰$ و $y = ۰$) دراین‌صورت لامپ مجدداً روشن خواهد شد و داریم $T = ۱$ (سطر چهارم جدول) .

این حالات راکه شامل تمام ترکیبهای ممکن دوکلید x و y است ، به صورت فوق وارد جدول می‌کنیم .

۲ ـ تابع T را با استفاده از جدول می‌نویسیم . می‌بینیم که تابع در سطرهای دوم وسوم دارای ارزش صفر است . یعنی وقتی کـه کلیدهای x و y در یك وضع نیستند جریان عبور نمی‌کند . چون در این دو وضع جریانی در مدار نیست می‌توان در این حالات مداری در نظر نگرفت. به‌عبارت دیگر ، بدون این که به نتیجهٔ‌کار درحالت‌کلی مدار لطمه واردآید، می‌توانیم

از این دو وضع صرف نظر کنیم . اما تابع در سطرهای اول و چهارم دارای ارزش ۱ می‌باشد، یعنی در این دو حالت جریان در مدار وجود دارد . سطر اول را در نظر بگیرید ، اگر x و y در اتصال متوالی باشند ، آن گاه ارزش تابع xy در سطر اول ۱ و در سایر سطرها صفر است . به همین ترتیب ، تابع $x'y'$ در سطر چهارم دارای ارزش۱ ودر سایر سطرها ارزش آن صفر است .

x	y	x'	y'	xy	$x'y'$
۱	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱

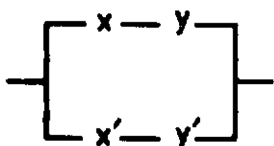
هر گاه به جدول ارزش درستی اتصال دو کلید موازی نگاه‌کنیم می‌بینیم که جدول‌مزبور درست دارای ویژگی لازم برای ارتباط xy و $x'y'$ می‌باشد . در آنجا کلید $a+b$ در صورتی دارای ارزش ۱ است که‌داشته باشیم ۱ = a یا ۱ = b .

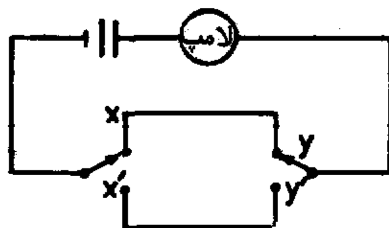
xy	$x'y'$	$xy+x'y'$
۱	۰	۱
۰	۰	۰
۰	۰	۰
۰	۱	۱

یعنی جدول ارزش درستی عبارت $xy+x'y'$ درست همان جدولی است که ما در شروع حل برای مسئله تشکیل دادیم پس تابع بولی مدار عبارت است : $T=xy+x'y'$.

۳ ـ در اینجا عبارت $xy+x'y'$ به ساده‌ترین صورت خود نوشته شده است .

۴ ـ در زیر مدار T به صورت ریاضی و فیزیکی رسم شده است .





مثال ۲ ـ مداری که جدول ارزش آن در زیر داده شده است رسم کنید .

x	y	A
۱	۱	۰
۱	۰	۱ ←
۰	۱	۱ ←
۰	۰	۱ ←

حل ـ ارزش عبارت A در سه سطر آخر جدول برابر ۱ است . در این سه وضع جریان در مدار عبور می‌کند . طبق آنچه در مثال ۱ دیدید این عبارت از جمله‌های : xy' ، $x'y$ ، $x'y'$ تشکیل شده است لذا عبارت بولی مدار برابر است با : $A = xy' + x'y + x'y'$.
اکنون A را با استفاده از قوانین جبر بول ساده می‌کنیم .

$$A = x'y + xy' + x'y'$$

$= x'y + (x + x')y'$ بنابه : B_3

$= x'y + ۱y'$ بنابه : B_4

$= x'y + y'$ بنابه : B_5

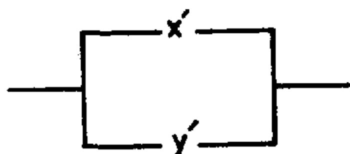
$= y' + x'y$ بنابه : B_2

$= (y' + x')(y' + y)$ بنابه : B_3

$= (y' + x')۱$ بنابه : B_4

$= y' + x'$

نمودار مدار در زیر رسم شده است .



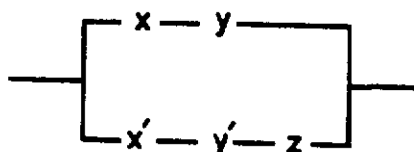
مثال ۳ ـ مداری که جدول ارزش آن در زیر داده شده است رسم کنید .

x	y	z	f
۱	۱	۱	۱←
۱	۱	۰	۱←
۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱←
۰	۰	۰	۰

حل ـ طبق این جدول ، f در حالات xyz ، xyz' و $x'y'z$ برابر۱است (جریان در مدارمی‌گذرد) پس:

$$f = xyz + xyz' + x'y'z \quad \text{بنا به جدول:}$$
$$= xy(z+z') + x'y'z \quad \text{بنا به } B_3:$$
$$= xy + x'y'z \quad \text{بنا به } B_4 \text{ و } B_5:$$

نمودار f در زیر رسم شده است :



مدارهای کامپیوتر ـ عضوهای منطقی مدار: یك عضومنطقی مدار را می‌توان به مثابه جعبه یا بستهٔ کوچکی درنظر گرفت‌که ازیك یا چند هادی ورودی (سیم ارتباطات) ویك یابیشتر هادی خروجی تشکیل شده است. هادیها علائمی‌با ولتاژ مثبت متناظر با ۱ یا ولتاژ صفرمتناظر با ۰ می‌فرستند معمولا حروف x ، y ،... را برای‌نشان دادن یك هادی (سیم) به‌کارمی‌برند. وقتی هادی x یك علامت می‌فرستدگفته می‌شود x دارای ارزش ۱ است و وقتی هادی علامت نمی‌فرستد x دارای ارزش ۰ است. این قرارداد تاحدی با قراردادی‌که قبلا برای‌کلیدهای بسته و باز به‌کار بردیم فرق دارد به‌عبارت دیگر دراینجا ما هادی که یك علامت می‌فرستد به‌عنوان یك‌مداربسته(دارای ارزش۱) وهادی‌که‌علامت نمی‌فرستد به‌عنوان یك‌مدارباز(دارای ارزش۰) درنظر می‌گیریم. عضوهای منطقی مداررا معمولا با یك دایره‌که یك حرف داخل‌آن نوشته‌شده وخطهایی‌که ورودیها وخروجیها را مشخص می‌سازد نشان می‌دهند . پیکانهای روی این خطها ورودی وخروجی‌مدار را مشخص‌می‌کنند. پیکانی‌که به‌طرف‌دایره‌است ورودی و دیگری‌خروجی مدار است. عضوهای منطقی مدار عبارتنداز:

۱ـ مدارمنطقی‌متمم ـ این مدار دارای یك ورودی ویك خروجی است‌که تابع‌آنها متمم یکدیگرند . بدین‌معنا که اگر ارزش ورودی مدار ۱ باشد، آن‌گاه ارزش خروجی‌آن ۰ است و بالعکس. نموداراین مدار درزیررسم شده است.

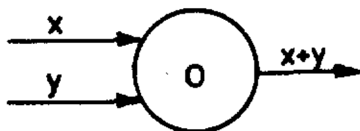


۲ـ مدار عطفی ـ این‌مدار متناظر است با رابط منطقی «و» درجبرگزاره‌ها ودارای دو یا بیشترهادی ورودی بوده ولی فقط دارای یك خروجی می‌باشد. نمودار این‌عضو منطقی‌درزیر رسم شیده است .



این مدار منطقی وقتی یك علامت به‌خارج‌می‌فرستد[1] (دارای ارزش خروجی ۱ است) که فقط وفقط هریك ازورودیهای آن یك‌علامت بفرستند (هر ورودی دارای‌ارزش ۱ باشد) . هرگاه ورودیهای این مدار منطقی را به x و y نشان دهیم ، خروجی با توجه‌به‌قراردادهای جبرکلیدی به‌صورت xy نوشته می‌شود .

۳ـ مدار فصلی ـ این مدار منطقی متناظر است با رابط منطقی « یا » درجبرگزاره‌ها و دارای دو یا چند ورودی بوده ولی دارای یك خروجی است . مدار وقتی یك علامت به‌خارج می‌فرستد (دارای ارزش خروجی۱ است) که اقلا یکی از ورودیهای آن یك علامت بفرستد (دارای ارزش ۱ باشد) . اگر ورودیهای این مدار را با x و y نشان دهیم خروجی این مدار با توجه به‌قراردادهای جبرکلیدی به‌صورت $x + y$ خواهد بود . نمودار این مدار در زیررسم شده است .



۴ـ مدار نیمه افزاینده ـ درسالهای قبل عددنویسی درمبنای ۲ را دیدید.

اعداددرمبنای۲	اعداددرمبنای‌اعشاری	اعداددرمبنای۲	اعداددرمبنای‌اعشاری
۱۰۰۰	۱۰	۱	۱
۱۰۰۱	۱۱	۱۰	۲
....	....	۱۱	۳
۱۱۰۱۱	۲۷	۱۰۰	۴
....	....	۱۰۱	۵
۱۰۱۰۰۰	۴۰	۱۱۰	۶
....	....	۱۱۰	۷
۱۱۰۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۸
....	....	۱۰۰۱	۹
۱۰۱۰۰۱۰۱	۱۶۵		

علت یادآوری عددنویسی درمبنای ۲ این است که بیشتر کامپیوترها اعمال جمع را درمبنای ۲

---

۱ ـ این علامت ممکن است به‌صورت عبورجریان یا روشن شدن‌یك چراغ یا زدن یك بوق یا ضربه کوتاه باشد.

انجام‌می‌دهند :

۲۹ +		۱۱۱۰۱ +
۱۲	→	۱۱۰۰
۴۱		۱۰۱۰۰۱

اخیراً بعضی ازکامپیوترها با مبنای ۸یا ۱۶ نیزکارمی‌کنند . درجمع دورقم ، هرگاه‌حاصل‌جمع دورقمی گردد رقم دوم راکه همان ۲ بریك است درسمت چپ رقم اول می‌نویسیم .

۱+
۱
۱۰

دراین صورت رقم سمت راست یعنی‌صفررا به S ورقم سمت چپ یعنی۱ (همان دوبریك) را به C نمایش می‌دهیم . برای جمع دورقم حالات زیررا درنظر می گیریم :

S	C	رقم دوم	رقم اول
مجموع در مبنای۲			
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰

این رقمها را به x وy نشان داده توابع بولی C وS را باتوجه به آنچه راجع به طرح مدارها گفته شد می‌نویسیم . جدول فوق را به دوجدول زیر تجزیه می‌کنیم :

x	y	C
۱	۱	۱←
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

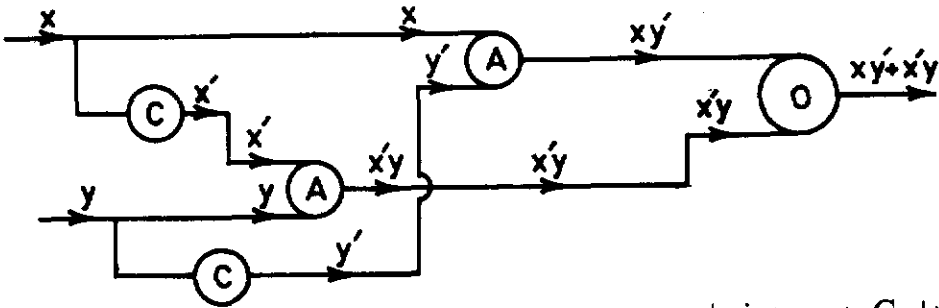
x	y	S
۱	۱	۰
۱	۰	۱←
۰	۱	۱←
۰	۰	۰

طبق‌آنچه قبلا دیدیم خواهیم داشت :

$$C = xy \quad \text{و} \quad S = xy' + yx'$$

حال مدار این توابع را بااستفاده از عضوهای منطقی مدارها تشکیل می‌دهیم . مدار S شامل دوکلید x' وy' بوده‌که برای هریك نیاز به‌یك مدارمتمم است. همچنین دوعبارت xy' و $x'y$ وجود داردکه احتیاج به دومدار عطفی دارد . بالاخره یك عبارت به صورت $xy' + x'y$

که نیازبه یك مدارفصلی دارد . مدار S درزیر رسم شده است .



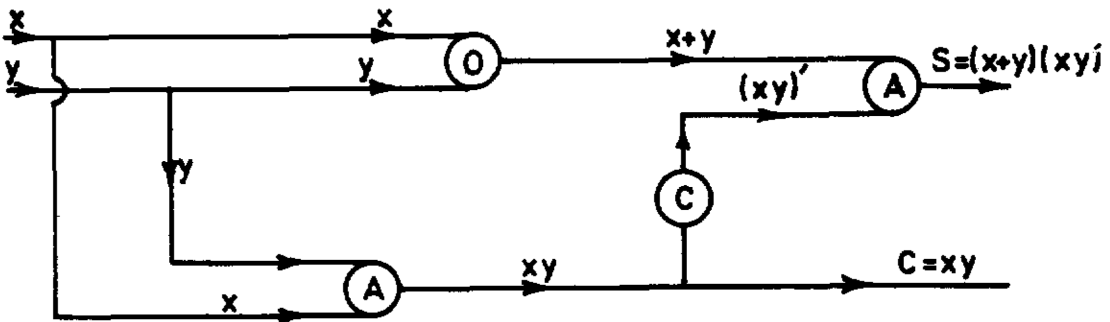
ومدار C به صورت زیراست :



باتوجه به قوانین جبربول می‌توان تعبیر دیگری از S به صورت زیربه دست‌آورد .

$$S = x'y + xy'$$
$$= (x + y)(x' + y')$$
$$= (x + y)(xy)'$$

مدار S دراینجا به ۴ مدار منطقی نیاز داردکه رقم C یعنی xy نیز شامل است . این‌مدار درزیر رسم شده است :



این مداررا برای سهولت به صورت



نشان داده آن را مدار نیمه افزاینده یا طرح نیمه افزاینده می‌خوانند. مدار نیمه افزاینده برای جمع دو رقم به‌کار می‌رود . جمع دوعدد به طورکامل به وسیلهٔ ترکیبهای این مدارمیسراست.

در کامپیوتر میلیونها مدار ازنوع مدارهای فوق‌الذکر ومدارهای دیگر وجود دارد که دراینجا فقط بمنظور آشنایی با طرزکار کامپیوتر مختصری از آنها ذکر شده است .

تمرین

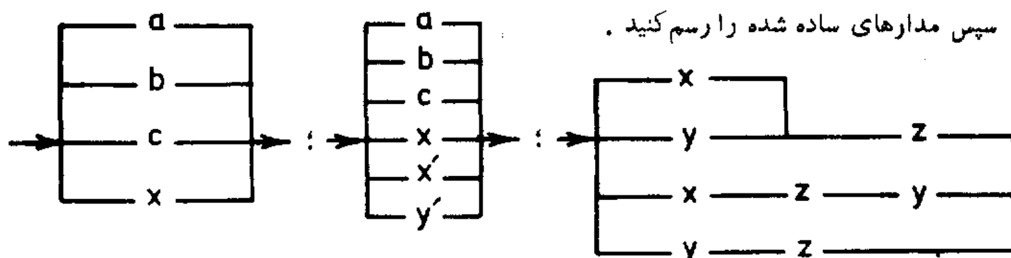
۱ ـ هریك ازاعداد ۲۴۰ ، ۱۲۰ و۶۴ را که درمبنای اعشاری نوشته شده‌اند درمبنای ۲ بنویسید.

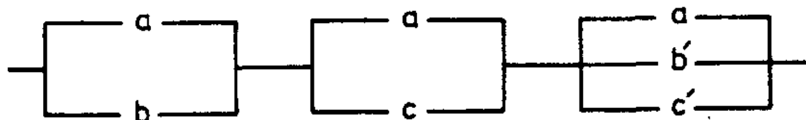
۲ ـ اعداد ۱۱۱۰۰۱ ، ۱۱۰۰۱۰۰ و ۱۱۱۱۱۱۱ را درمبنای اعشاری بنویسید .

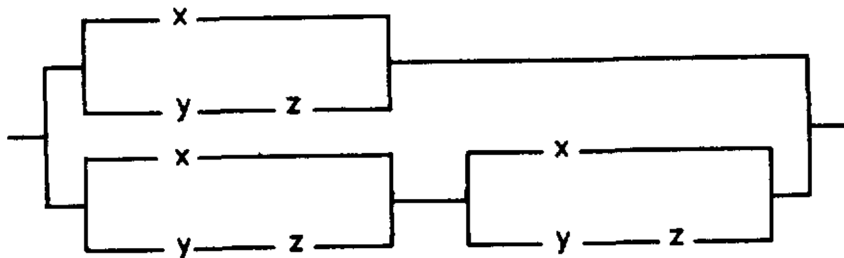
۳ ـ جمع‌های زیررا انجام دهید (درمبنای ۲)

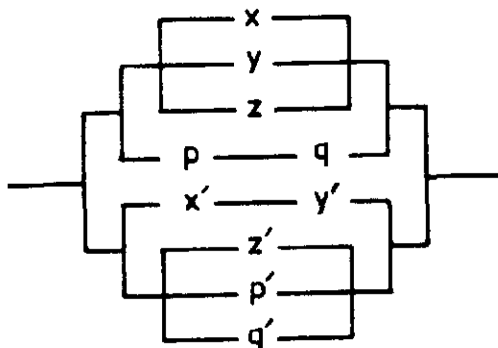
۱۰۱۰۱/۰۱۰۱ +	۱۰۱۰۰۱ +	۱۰۰۱۱۰ +
۱۰۱۰۰/۰۰۱	۱۰۱۰۱	۱۰۱۱۰

۴ ـ عبارات بولی مدارهای زیررانوشته ودرصورت امکان آنهارا حتی‌المقدور ساده نمایید. سپس مدارهای ساده شده را رسم کنید .









۵- بااستفاده‌ازعضوهای منطقی هریك ازمدارهای زیر را که باجدول ارزش درستی‌خود مشخص شده‌اند رسم کنید .

x	y	z	T
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰

x	y	z	B
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۰	۰	۰

x	y	A
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۱	۰
۰	۰	۰

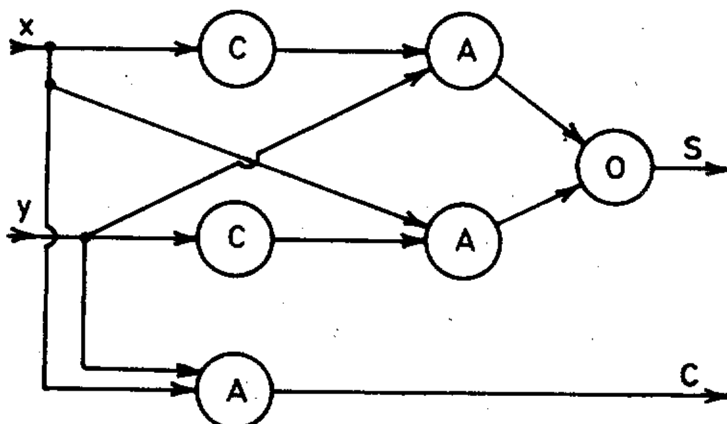
۶- بااستفاده‌ازعضوهای‌منطقی‌جدول‌ومدارعبارت $A = y(x+z) + x'y'z'$ رارسم‌کنید.

۷ - جدول‌عبارت بولی‌زیر را تشکیل دهید: $T = xy'z' + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$

۸ - مداری‌ازسه‌کلید a، b و c ویك چراغ تشکیل شده است. لامپ وقتی روشن‌خواهد شد که حداقل دوکلید از سه‌کلید مزبور بسته باشد. نشان دهیدکه عبارت بولی مدار مزبور را می‌توان به‌صورت $A = ab + c(ab' + a'b)$ نوشت .

۹- کریدوری به‌وسیلهٔ یك رشته لامپ رنگی تزیین شده است . مداری طرح نمایید که لامپها به‌وسیلهٔ هریك ازسه‌کلیدی‌که به‌ترتیب‌درطرفین ووسط‌کریدور قرار می‌دهیم‌کنترل شوند (خاموش و روشن شوند) .

۱۰ - عبارت بولی S و C را برای مدار زیربنویسید.



کامپیوتر

مقدمه ـ کامپیوتر دستگاهی است الکترونیکی که کارهای معینی درصورتی‌که نحوهٔ اجرای آنها را دراختیارش قراردهند با سرعت فوق‌العاده زیاد انجام می‌دهد. بنابراین برعکس آنچه مردم عادی می‌پندارند و برخلاف آنچه درفیلمهای خیالی دیده می‌شود کامپیوتر دستگاهی شبیه مغزانسان‌نمی‌باشد، یعنی کامپیوتر به‌تنهایی‌قادربه‌اندیشیدن یا انجام‌کاری نیست‌بلکه‌برای انجام‌یک‌کارمثلاحل یک مسئله باید معلومات ومراحل حل‌مسئله، گام‌به‌گام به‌آن داده شود تا کامپیوتربا استفاده از این دادهها جواب را تعیین وبه‌اطلاع برساند.

معلومات رادادهها و مراحل تنظیم شدهٔ حل مسئله‌را برنامه وجواب خارج شده را نتیجه می‌نامند. طرز کار کامپیوتر درست شبیه اعمالی است‌که یک فرد جهت تعیین‌جواب یک‌مسئله انجام می‌دهد. یعنی شماهم وقتی می‌خواهید جواب مسئله‌ای را پیداکنید باید اول معلومات را مشخص نموده سپس راه‌حل‌کلی مسئله‌را یافته وعملیات لازم را تنظیم و دنبال نموده تا جواب به دست‌آورید.

همان‌طورکه در جبرکلیدی دیدید، کامپیوتر درمحاسبه از روشهای کاملا منطقی استفاده می‌نماید. درحقیقت مدارها برطبق‌قانون جبر بول‌تنظیم می‌شوند. امادلیل این‌که‌کامپیوتر تااین اندازه درزندگی روزمره وارد شده عبارت است از:

۱ـ **سرعت** ـسرعت‌کارکامپیوتر درانجام‌عملیات فوق‌العاده زیاد است. یک‌کامپیوتر درهر ثانیه تعداد بی‌شماری اعمال‌حسابی را انجام می‌دهد. گاهی‌اوقات سرعت در انجام محاسبات از ضروریات کار است. مثلا، در پروازهای فضایی لازم است‌در لحظاتی بسیار کوتاه جهت اتخاذ تصمیم معینی مانند تعیین جهت حرکت مقدار زیادی محاسبات پیچیده انجام شود. مثال دیگر، بررسی نتایج حاصل از سرشماریهای عمومی در سطح کشور می‌باشد. بررسی و تعیین نتیجهٔ حاصل از اعداد به دست آمده از سرشماری در یک زمان کوتاه بدون استفاده از کامپیوتر کاری است بسیار مشکل.

۲ ـ **درستی نتیجه** ـ کامپیوتر بر خلاف انسان‌که ممکن است در محاسبات دچار اشتباه شود در صورتی که دادهها و دستورات درست به‌او داده شوند محاسبات را بدون اشتباه انجام می‌دهد.

۳ ـ **خستگی ناپذیری** ـ انسان پس از مدتی‌کار متوالی و پشت سرهم به خصوص وقتی که‌کار جنبهٔ تکراری داشته باشد خسته می‌شود وحال‌آن که کامپیوتر می‌تواند ساعتها، روزها و هفته‌ها به طور متوالی بدون احساس خستگی کار نماید.

۴ ـ **خودکار بودن** ـ در موقع انجام عملیات حسابی با ماشینهای حساب معمولی،

دستی یا برقی ، شخص عامل باید دائماً دگمه‌ها را فشار دهد و با ماشین مشغول کار باشد در حالی‌که کامپیوتر به‌علت داشتن حافظه این عیب راندارد و پس از آن‌که داده‌ها و دستورات در اختیار کامپیوتر قرار گرفت ، شخص عامل حتی می‌تواند کامپیوتر را ترك کند و کامپیوتر پس از انجام کار خواسته شده نتیجه را به خارج می‌فرستد .

اجزای تشکیل دهندهٔ یك کامپیوتر

کامپیوتر معمولی از ۵ واحد مهم به نامهای واحد ورودی ، واحد خروجی ، واحد حافظه ، واحد کنترل یا فرمان و واحد محاسبه تشکیل شده است .

واحد ورودی ـ دستگاهی است که به وسیلهٔ آن داده‌ها و مـراحل تنظیم شدهٔ عمل (برنامه) در اختیار کامپیوتر قرار می‌گیرد . معمولترین واحد ورودی دستگاهی موسوم به ماشین کارت‌خوان است . این ماشین اطلاعات را از کارت به حافظه منتقل می‌نماید .

واحد حافظه ـ دستگاهی است که **برنامه** را از واحد ورودی دریافت و به طور موقت یا دائم نگهداری می‌کند . علاوه بر داده‌ها و دستورات ، حافظه می‌تواند تمام مقادیری را که در حین انجام عملیات به دست می‌آورد نگهداری نماید .

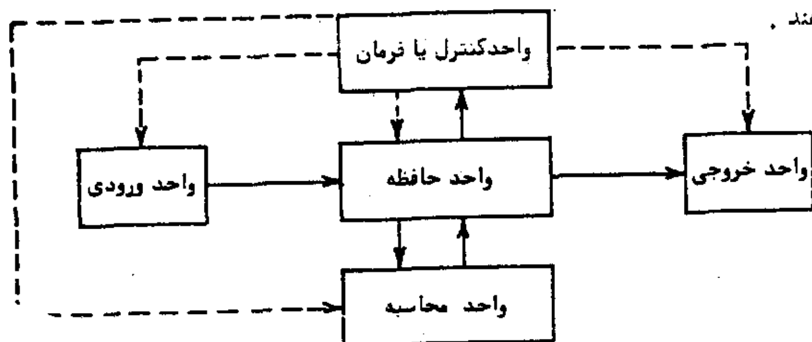
واحد محاسبه ـ اعمال حسابی مانند جمع ، تفریق، ضرب وتقسیم و عمل‌مقایسه توسط واحد محاسبهٔ کامپیوتر انجام می‌گیرد .

واحد فرمان ـ واحد فرمان قسمت اساسی کامپیوتر است و وظیفهٔ آن نظارت بر حسن کار و انجام وظیفهٔ واحدهای دیگر و ایجاد هماهنگی آنهاست .

واحد خروجی ـدستگاهی‌است که نتایج ثبت شده در حافظه رابه‌صورتی به خارج منتقل می‌نماید .

معمولترین واحد خروجی دستگاهی است موسوم به دستگاه چاپ . این دستگاه اطلاعات ثبت شده در حافظه را روی صفحات کاغذ مخصوص چاپ می‌کند .

در زیر واحدهای مختلف یك کامپیوتر و چگونگی ارتباط آنها با یکدیگر نشان داده‌شده است . پیکانهای پیوسته مسیر نقل و انتقال اطلاعات و پیکانهای نقطه‌چین اجرای دستورات را نشان می‌دهند .



برنامه‌های کامپیوتر

برای بهره‌گیری از کامپیوتر مسائل به صورت برنامه تنظیم می‌گردد .

برنامه عبارت است از فرامینی که انتقال راه حل کلی مسئله را به کامپیوتر نشان می‌دهد تا کامپیوتر براساس آن داده‌ها و دستورات بتواند محاسبات را انجام دهد .

برنامهٔ کامپیوتر با استفاده از زبانهای خاصی که برای کامپیوتر ابداع شده توسط شخصی به نام برنامه نویس تنظیم می‌گردد .

ساختمان حافظهٔ کامپیوتر ـ همان طور که قبلا اشاره شد حافظه قسمتی از کامپیوتر است که اطلاعات درآن قرار می‌گیرد تا به هنگام نیاز از آنها استفاده شود . حافظه خود از اجزایی که هریك به نام خانهٔ حافظه خوانده می‌شود تشکیل شده است . هر خانهٔ حافظه دارای آدرس مشخصی است که توسط آن آدرس می‌توان به اطلاعات ذخیره شده دست یافت . در هر خانهٔ حافظه یك عدد یا یك حرف قابل ثبت است .

۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳
۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹
...	...	...	...	...	...

حافظه دارای دو خاصیت اساسی است :

۱ ـ با دادن اطلاعات جدید به حافظه اطلاعات ثبت شدهٔ قبلی از بین می‌رود و اطلاعات جدید جانشین آنها می‌گردد .

۲ ـ اطلاعات ثبت شده درحافظه را به هرتعدادبارکه بخواهیم می‌توان ازحافظه خواند بدون آن‌که تغییری درمحتوای آن پیدا شود .

دوخاصیت فوق‌را می‌توان درهر رسانهٔ مغناطیسی‌یافت (نوارضبط صوت) چون حافظه‌ها نیز اکثراً ازاین جنس هستند دارای این‌خواص می‌باشند .

هرکامپیوتر معمولا دارای یك یا چند نوع حافظهٔ فرعی‌نیز می‌باشد .

اصول کار باکامپیوتر ـ کامپیوتر محاسبات‌خودرا باایجادتغییرات‌دریك‌دستگاه الکترونیکی پیچیده به‌صورت ضربه‌های‌الکتریکی وبااستفاده ازجبر کلیدی درمبنای ۲ انجام می‌دهد و چون این محاسبات به‌زبان معمولی‌نیست بنابراین‌درکار باکامپیوتر باید به ترتیب زیرعمل‌کرد:

۱ - محاسباتی که باید انجام شود قبلاً آماده شوند .

۲ - این محاسبات به‌مرحله‌های ساده‌ای تقسیم گردند (برای این کار از رهنما یا فلوچارت استفاده می‌شود) .

۳ - برنامه‌نویس رهنمای تهیه‌شده‌را به یکی‌از زبانهای‌خاص برنامه‌نویسی ترجمه‌می‌نماید.

۴ - برنامهٔ‌ترجمه شده‌به وسیلهٔ دستگاه منگنه‌زن روی کارتهای‌مخصوص منگنه می‌شود.

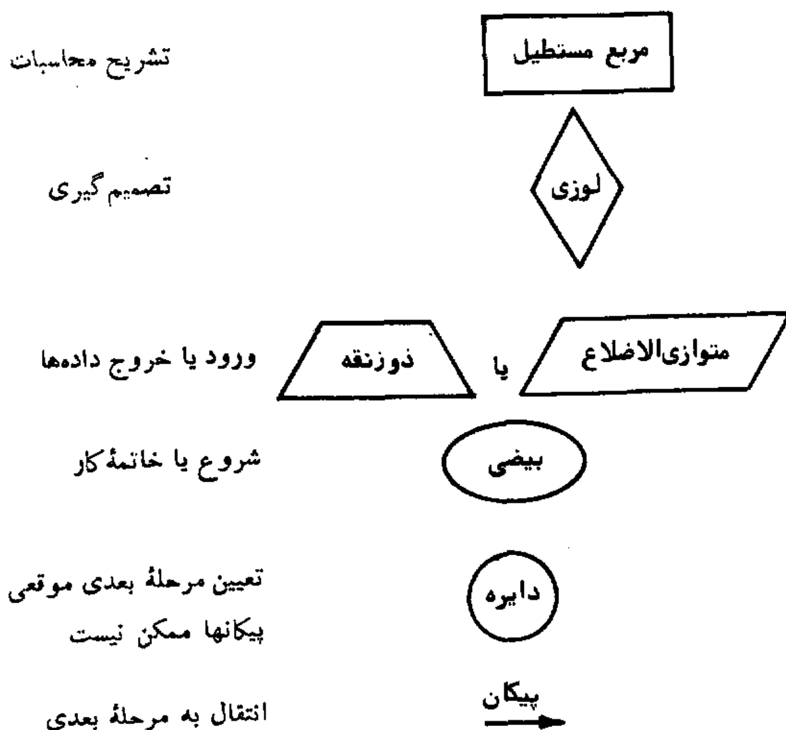
۵ - کارتهای منگنه شده برنامه به ضمیمهٔ دسته کارتهای داده‌ها (درصورت لزوم) برای اجرا به ماشین داده می‌شود و نتیجه برروی کاغذهای مخصوص یاواحد خروجی از قبیل صفحهٔ تلویزیون یا نوار مغناطیسی منتقل می‌شود .

کارت منگنه - کارت منگنه کارت مقوایی است . معمولترین نوع این کارت بـه شکل مربع‌مستطیل‌بوده ودارای ۸۰ ستون‌و۱۲ سطر می‌باشد.

رهنما(فلوچارت) - ازآنجاکه رهنما نقش‌اساسی درتهیهٔ یك برنامه داشته ومستقل اززبان برنامه نویسی‌است ما به‌تشریح بیشتر آن می‌پردازیم .

رهنما عبارت است ازنمودار منطقی‌یك مسئله بااستفاده ازاشکال هندسی

اشکال هندسی معمولا با قراردادهای زیر مورد استفاده قرار می گیرند .



چند مثال

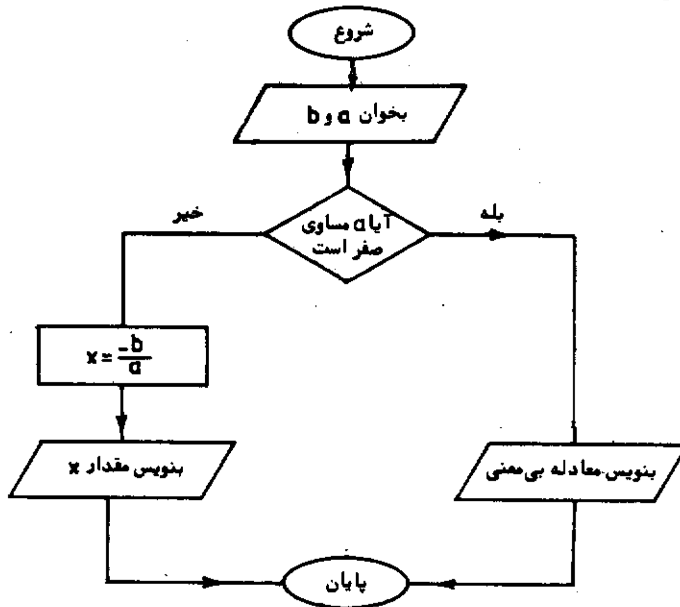
۱ ـ می‌خواهیم ره‌نما (فلوچارت) حل یك معادلهٔ یك‌مجهولی درجه اول‌را در R رسم‌نماییم.

حل ـ معادله را به صورت $ax + b = 0$ درنظرگرفته برای حل‌آن کافی است دو مقدار a و b را بشناسیم. باتوجه به‌این‌مقادیر درحالات‌مختلف، جواب معادله را به دست می‌آوریم. مراحل عمل به صورت زیرانجام می‌گیرد:

۱ ـ شروع ؛ ۲ـ خواندن

۳ ـ
- اگر $a = 0$ آن‌گاه بنویس معادله بی‌معنی ـ بروبه پایان .
- اگر $a \neq 0$ ، آن‌گاه $x = -\frac{b}{a}$ محاسبه بنویس مقدار x .

۴ ـ پایان ـ



۲ـ می‌خواهیم ره‌نما (فلوچارت) حل یك‌دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی را در R بااستفاده از دستور کرامر رسم کنیم .

حل ـ دستگاه معادله را به صورت

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

اختیار می‌نماییم و می‌دانیم جهت حل این دستگاه نیاز به مقادیر $\begin{cases} a \quad b \quad c \\ a' \quad b' \quad c' \end{cases}$ می‌باشد .

حال اگر دترمینال ضرایب را Δ بنامیم خواهیم داشت :

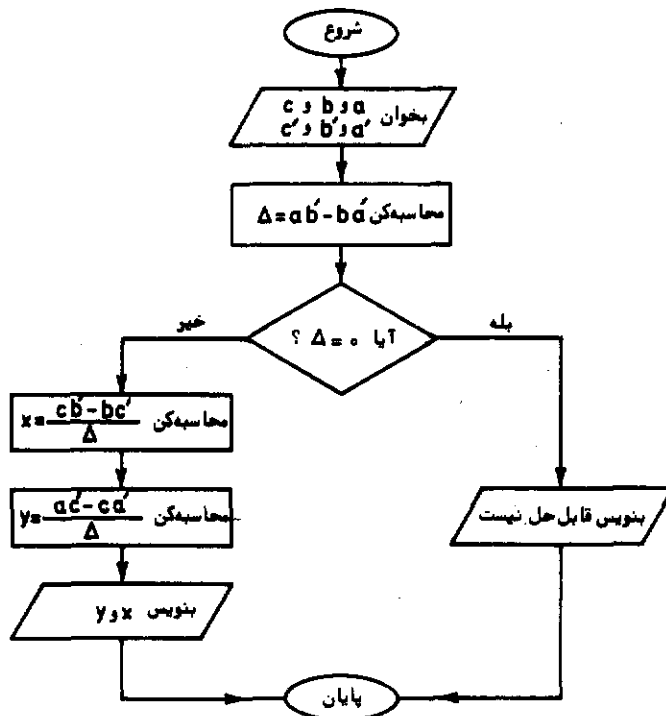
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

در صورتی که $\Delta \neq 0$ در این صورت دستگاه دارای دو جواب زیر است :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{cb' - bc'}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac' - ca'}{\Delta}$$

و در صورتی که $\Delta = 0$ دستگاه دارای جواب نیست . رەنمای مربوط چنین است



مثال ۳ ـ می‌خواهیم رەنمای حل یك معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم را در R بنویسیم .

حل ـ معادله را به‌صورت $ax^2 + bx + c = 0$ درنظرمی‌گیریم . برای تعیین ریشه‌های این معادله بایدمراحل زیرانجام شود:

۱ـ شروع.

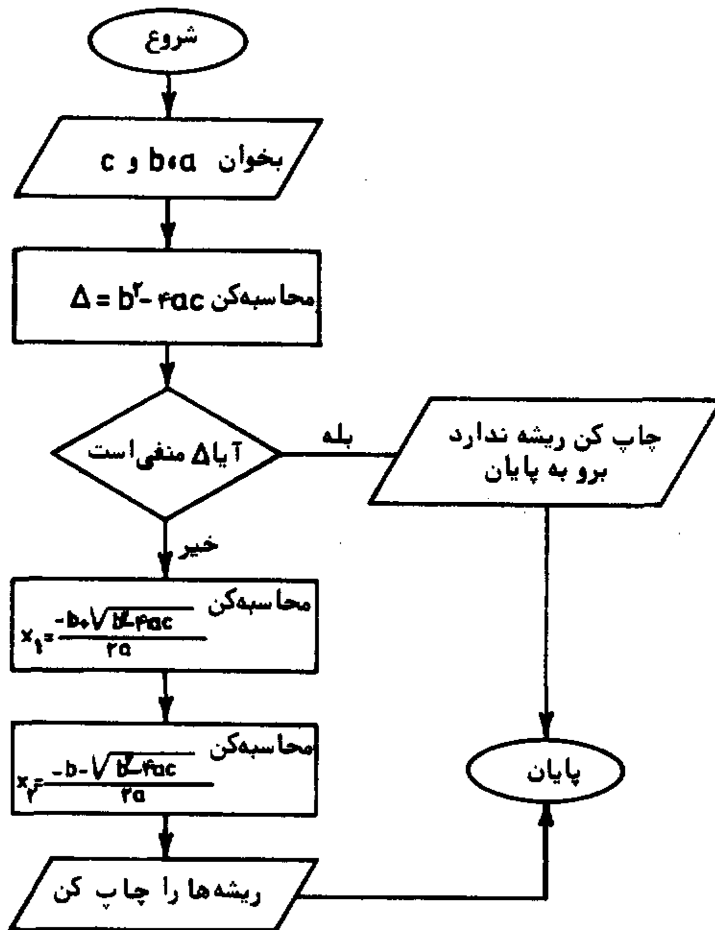
۲ـ مشخص داشتن مقادیر a ، b و c .

۳ـ محاسبهٔ $\Delta = b^2 - 4ac$.

۴ـ تعیین‌علامت Δ ، اگر Δ صفر یا بزرگتر از صفر باشد یك یا دوریشهٔ حقیقی‌محاسبه شوند و به‌دستور شمارهٔ ۵ مراجعه شود.

۵ـ چاپ ریشه‌های محاسبه شده .

در ۵ مرحله‌کار موردنظر خاتمه یافته است.ره‌نمای این مسئله‌عبارت است از:



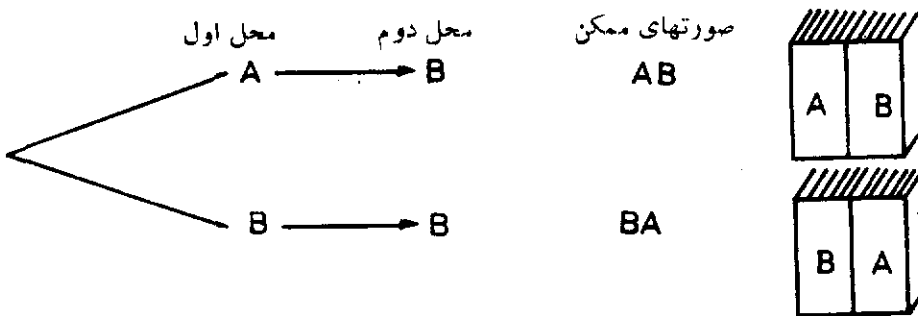
فصل چهارم

آنالیز ترکیبی

تبدیل (جایگشت)

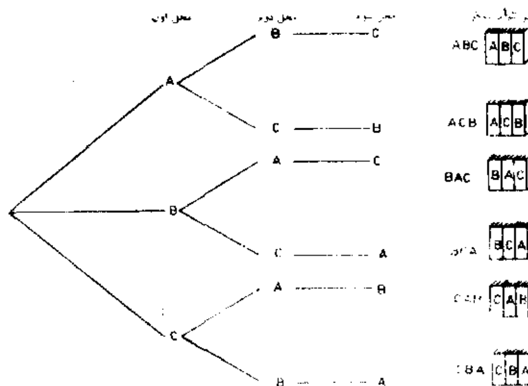
مثال ۱ - می‌خواهیم دو کتاب را که با حروف A و B مشخص شده‌اند دریك قفسه کنارهم جادهیم ؛ صورتهای ممکن را برای انجام این کار بنویسید .

دو کتاب به صورتهای زیر می‌توانند دریك قفسه کنارهم قرارگیرند :



هر کدام از صورتهای AB و BA به نام یك تبدیل دو حرف A و B خوانده می‌شود .

مثال ۲ - می‌خواهیم سه کتاب را که با حروف A ، B و C مشخص شده‌اند ، در یك قفسه کنارهم جا دهیم؛ صورتهای ممکن را برای انجام این کار بنویسید. برای تعیین صورتهای ممکن از نمودار درختی استفاده می‌کنیم .



در اینجا دیده می‌شود که کتابهای A ، B و C را به صورتهای زیر می‌توان دریك‌قفسه کنارهم جا داد :

ABC ؛ ACB ؛ BAC ؛ BCA ؛ CAB ؛ CBA

هرکدام از صورتهای فوق یك تبدیل سه حرف A و B و C نامیده می‌شود .

مثال ۳ ـ تمام اعداد چهار رقمی راکه با ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ می‌توان نوشت بنویسید (تکرار ارقام در یك عدد مجاز نیست). هرگاه ازنمودار درختی برای این منظور استفاده‌کنیم، اعداد زیر به‌دست می‌آیدکه تعداد آنها برابر ۲۴ است :

۴ ۱ ۲ ۳	۳ ۱ ۲ ۴	۲ ۳ ۱ ۴	۱ ۲ ۳ ۴
۴ ۱ ۳ ۲	۳ ۱ ۴ ۲	۲ ۳ ۴ ۱	۱ ۲ ۴ ۳
۴ ۲ ۱ ۳	۳ ۲ ۱ ۴	۲ ۴ ۱ ۳	۱ ۳ ۲ ۴
۴ ۲ ۳ ۱	۳ ۲ ۴ ۱	۲ ۴ ۳ ۱	۱ ۳ ۴ ۲
۴ ۳ ۱ ۲	۳ ۴ ۲ ۱	۲ ۱ ۳ ۴	۱ ۴ ۳ ۲
۴ ۳ ۲ ۱	۳ ۴ ۱ ۲	۲ ۱ ۴ ۳	۱ ۴ ۲ ۳

هرکدام از صورتهای فوق به نام یك تبدیل چهار رقم خوانده می‌شود .

تعریف ـ یك تبدیل از یك مجموعه اشیا عبارت از یك حالت از قرار دادن عضوهای آن مجموعه کنار هم می‌باشد .

محاسبهٔ تعداد تبدیلهای مثالهای فوق ـ دیدید که تعداد تبدیلهای دو شیء A و B برابر ۲ و تعداد تبدیلهای سه شیء A ، B و C برابر ۶ و تعـداد تبدیلهای چهار شیء برابر ۲۴ است . یك راه برای تعیین تعداد تبدیلها این استکـه باکمك نمودار درختی ویا وسیلهٔ دیگر ، تمام تبدیلها را نوشته سپس آنها را بشمریم . البته این‌کار وقتی تعداد اشیا زیاد باشد، مشکل خواهد بود . ببینیم چگونه می‌توان بدون نوشتن تمام تبدیلها تعداد آنها را حساب‌کرد ؟

برگردیم به‌مثال قراردادن ۳کتاب دریك قفسه؛ وقتی ما می‌خواهیم سه‌کتاب A ، B وC را در یك قفسه‌کنارهم جا دهیم ، در حقیقت باید سه محل خالی را به صورتهای زیر پرکنیم:

محل سوم	محل دوم	محل اول
?	?	?

در محل اول هرکدام ازکتابهای A ، B یا C را می‌توان جاداد. پس برای پرکردن محل اول سه راه وجود دارد :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
?	?	۳

بعد ازاین‌که کتاب اول درمحل مربوط قرار داده شد (محل اول پرشد) ، برای محل دوم دو کتاب باقی می‌ماند (مثلاً اگرکتاب اول A باشد کتابهای B و C باقی خواهد ماند) . پس برای پرکردن محل دوم دو راه وجود دارد :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
?	۲	۳

بعداز این‌که کتاب دوم قرار داده شد ، یك‌کتاب در آخر باقی می‌ماند (مثلاً اگر A و B جا داده شده باشد C باقی خواهد ماند) لذا برای محل سوم یك راه وجود خواهد داشت :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
۱	۲	۳

تعداد تبدیلهای سه شیء از ضرب عددهای ۳ و ۲ و ۱ به‌دست می‌آید .

تعداد تبدیلهای سه شیء $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

همچنین برای تعیین تمام اعداد چهاررقمی که با ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ بدون تکرارارقام نوشته می‌شوند ، باید ۴ محل به‌صورت زیر پرشود :

محل چهارم	محل سوم	محل دوم	محل اول
?	?	?	?

محل اول را با هرکدام از این چهار رقم می‌توان پرکرد . به عبارت دیگر ، محل اول با ۴ راه پرمی‌شود :

تعدادحالت‌های محل چهارم	تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
?	?	?	۴

بعد ازآن‌که محل اول بایکی از راههای گفته شده پرشد سه رقم باقی می‌ماند (اگر ۳ برداشته شده باشد ۱ ، ۲ و ۴ می‌ماند) در نتیجه محل دوم باهرکدام ازاین سه رقم ممکن است پرشود . به عبارت دیگر محل دوم با ۳ راه پرمی‌شود :

تعدادحالتهای محل چهارم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل اول
?	?	۳	۴

بعد از این‌که محل دوم پرشد دو رقم باقی می‌ماند (مثلاً اگر یك برداشته شده باشد ، ۲ و ۴ باقی می‌ماند) در نتیجه محل سوم باهرکدام از این دورقم می‌تواند پرشود . به عبارت دیگر برای اشغال محل سوم دو راه وجود دارد :

تعدادحالتهای محل چهارم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل اول
?	۲	۳	۴

پس از پرشدن محل سوم تنها یك رقم باقی می‌ماند. درنتیجه برای پرکردن محل‌چهارم فقط یك راه وجود خواهد داشت :

تعدادحالتهای محل چهارم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل اول
۱	۲	۳	۴

تعداد تبدیلهای چهار رقم از ضرب عددهای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ درهم به دست می‌آید :

تعداد ۴ شیء = ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

باتوجه به‌توضیحات فوق آیا می‌توانید تعداد تبدیلهای ۵ شیء را حدس بزنید ؟ آیاتعداد تبدیلهای ۶ شیء برابر است با :

تعداد تبدیلهای ۶ شیء = ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۷۲۰

آیا می‌توانیدحدس بزنیدکه تعداد تبدیلهای n شیء وقتی درهرمرتبه همهٔآنها به‌کاربرده شود به چه صورت خواهد بود ؟

برای توضیح عمل ضرب در محاسبات فوق اصل زیر را بیان می‌کنیم :

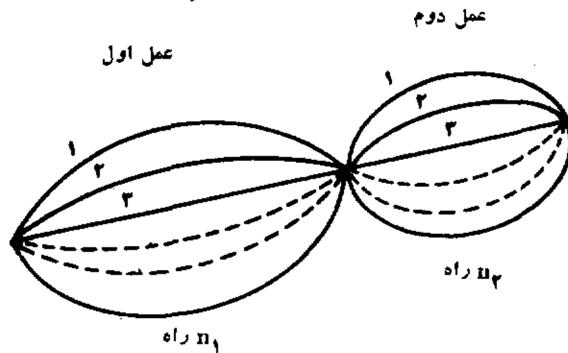
اصل شمارش ـ هرگاه یك عمل معین بتواند با n_1 راه مختلف انجام شود وبرای هریك از این راهها عمل دیگری بتواند با n_2 راه انجام گردد . در این صورت دو عمل باهم می‌توانند با

$n_1 \times n_2$ راه مختلف انجام شوند.

هرگاه n_1 راه اول را با مجموعهٔ A و n_2 راه دوم را با مجموعهٔ B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$A = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، \ldots n_1 \}$$

$$B = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، \ldots n_2 \}$$



درحقیقت راههایی که دوعمل باهم می‌توانند انجام شوند برابر با تعداد عضوهای حاصل‌ضرب‌دکارتی‌دومجموعهٔ A و B خواهد بود:

$A \times B$ تعداد عضوهای $= n(A \times B) = n(\{(a ، b) \mid a \in A$ و $b \in B\})$

اصل شمارش برای سه عمل نیز درست است. یعنی: هرگاه یك عمل بتواند به n_1 راه مختلف انجام شود وبعد از این که عمل اول بایکی از این راهها انجام شد، برای هریك از این راهها عمل دوم بتواند با n_2 راه مختلف انجام گیرد وپس از انجام عمل دوم، برای هریك از آنها عمل سوم بتواند با n_3 راه مختلف انجام شود، این سه عمل باهم می‌توانند با $n_1 \times n_2 \times n_3$ راه مختلف انجام گردند.

اصل شمارش برای k $(k \in N)$، عمل نیز درست است.

مثال ۱ ـ یك شرکت اتوبوسرانی‌هرروز ۵ دستگاه اتوبوس ازشیراز به تهران و۳ دستگاه اتوبوس از تهران به مشهد می‌فرستد، اگر شخصی بخواهد با اتوبوسهای این شرکت از شیراز به مشهد مسافرت‌کند، برنامهٔ مسافرت او به چند طریق ممکن است تنظیم شود.

حل: طبق اصل شمارش تعداد برنامه‌های مسافرت‌این‌شخص برابراست با: $۵ \times ۳ = ۱۵$.

مثال ۲ ـ ادارهٔ راهنمایی رانندگی یك شهرستان برای شماره‌گذاری ماشینهای‌آن شهر از این طرح استفاده می‌کندکه شمارهٔ هرماشین شامل یك حرف الفبا ویك عدد سه رقمی است. مانند « ۲۵۳ ـ ب » تعیین‌کنید با این طرح چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری‌کرد (تکرار رقمها مجاز است).

حل: طبق آنچه‌گفته شد، در اینجا ما ۴محل به‌صورت صفحهٔ بعد داریم‌که‌باید پرشود:

محل اول	محل دوم	محل سوم	محل چهارم
?	?	?	?

محل اول می‌تواند باهریك از حروف الفبای فارسی پرشود و چون ما ۳۲ حرف الفبا داریم لذا محل اول با ۳۲ طریق ممکن است پرشود .

تعدادحالتهای محل اول	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل چهارم
۳۲	?	?	?

بعد ازاین‌که حرف الفبا به‌کار برده شد ، محل دوم باید بایکی از ارقام یك تا۹ پرشود (چرا ؟) ؛ و چون تعداد این ارقام برابر ۹ است در نتیجه محل دوم با ۹ طریق ممکن است پرشود .

تعدادحالتهای محل اول	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل چهارم
۳۲	۹	?	?

هرکدام از محلهای سوم و چهارم باید باارقام از صفر تا ۹ پرشوند و تکرار ارقام مجاز است ؛ لذا هرکدام به ۱۰ طریق پرخواهد شد. بنابراین داریم :

تعدادحالتهای محل اول	تعدادحالتهای محل دوم	تعدادحالتهای محل سوم	تعدادحالتهای محل چهارم
۳۲	۹	۱۰	۱۰

در نتیجه تعداد ماشینهایی‌که با طرح فوق شماره‌گذاری می‌شوند طبق‌اصل شمارش برابر است با :

$$۳۲ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۲۸۸۰۰$$

مثال ۳ - ۱۲ کتاب در سه ردیف و در هرردیف ۴ کتاب قرار داده شده است . شخصی می‌خواهد ۳ کتاب را از میان ۱۲ کتاب بدین ترتیب انتخاب‌کندکه از هرردیف فقط یك‌کتاب بردارد ؛ تعیین‌کنید به چند طریق می‌تواند این‌کار را انجام دهد .

حل : دراینجا سه محل خالی به صورت زیر داریم‌که باید پرشود :

محل اول	محل دوم	محل سوم
?	?	?

برای پر کردن محل اول ۱۲ کتاب موجود است کـه هرکدام از هـرردیف ممکن است برداشته شود :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
?	?	۱۲

بعد از این‌که محل اول پرشد ، ردیفی‌که‌کتاب اول از آن انتخاب شده حـذف می‌گردد در نتیجه دو ردیف یعنی ۸ کتاب برای محل دوم باقی می‌ماند :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
?	۸	۱۲

بعد از برداشتن کتاب دوم ردیفی که این‌کتاب درآن قرار داشته نیز حذف خواهد شد ، درنتیجه یك ردیف یا ۴کتاب برای محل سوم باقی می‌ماند :

تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل اول
۴	۸	۱۲

بنابراین تعداد راههای ممکن برای انجام این کارطبق اصل شمارش برابراست با :

$$۱۲ \times ۸ \times ۴ = ۳۸۴$$

تمرین

۱- تبدیلهای مختلف چهار حرف D ، E ، F و G را بنویسید .

۲- تبدیلهای مختلف پنج علامت * ، ○ ، □ ، △ و ● را بنویسید .

۳- تمام اعداد سه رقمی را کـه با ارقام ۳ ، ۴ و ۵ ممکـن است نوشته شود بنویسید (تکرار مجاز نیست) .

۴- رضا ۶ مداد رنگی دارد ؛ تعیین کنید به چند طریق می‌تواند آنها را در یك ردیف کنارهم قرار دهد .

۵- ۷ نفر دونده برای انجام یك مسابقهٔ دو صد متر وارد زمین می‌شوند ؛ هرگاه هیچ دونفر دونده‌ای مساوی نکنند تعیین‌کنید به‌چند طریق ممکن است این ۷ نفرمسابقه‌را تمام‌کنند.

۶- چه تعداد زوجهای مرتب به صورت (x، y) ممکن است نوشته شود هـرگاه

$x \in \{a, b, c, d\}$ و $y \in \{۱, ۲, ۳\}$.

۷- تعداد تبدیلهای رقمهای صفر تا ۹ را درنوشتن یك عدد ده رقمی به دست‌آورید .

۸- اگر در شهرستان A هرشمارهٔ اتومبیل شامل یك حرف الفبا و یك عدد شش رقمی و در شهرستان B هرشمارهٔ اتومبیل شامل یك حرف الفبا و یك عدد چهار رقمی باشد ، تعداد اتومبیلهایی که در شهرستان A ممکن است شماره‌گذاری شود چند برابر تعداد اتومبیلهایی‌است که می‌توان در شهرستان B شماره‌گذاری کرد ؟

۹- از شهر A به شهر B سه راه و ازشهر B به شهر C ۴ راه موجود است. تعیین‌کنید به چند صورت یك مسافر ممکن است از شهر A و از طریق شهر B به شهر C مسافرت رفت و برگشت انجام دهد . درصورتی‌که راههای انتخاب شده در رفت وبرگشت یکی نباشد .

۱۰- به چند طریق ممکن است ۷ کتاب مختلف را در یك قفسه جا داد به‌قسمی‌که :
الف ـ دوکتاب مخصوص پهلوی هم باشند ؛ ب ـ سه‌کتاب مخصوص پهلوی‌هم باشند.

فاکتوریل

دیدیم که :

تعداد تبدیلهای ۳ شیء $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$
تعداد تبدیلهای ۴ شیء $= ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$
تعداد تبدیلهای ۵ شیء $= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$ (۱)
تعداد تبدیلهای ۶ شیء $= ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$
....
....

به‌همین قیاس تعداد تبدیلهای n شیء به‌دست می‌آید :

تعداد تبدیلهای n شیء $= n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳) \times \dots \times ۳ \times ۲ \times ۱$

یك راه ساده برای نوشتن حاصل ضربهای فوق استفاده از تعریف زیر است :

تعریف ـ حاصل ضرب تمام اعداد درست مثبت از n تا ۱ را به صورت !n نمایش داده آن را n فاکتوریل می‌خوانند .

$$n! = n(n-۱)(n-۲)(n-۳) \times \dots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

بنابر قرارداد صفر فاکتوریل را مساوی یك می‌گیریم یعنی : $۰! = ۱$

طبق این تعریف داریم : $۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

$$۱۰! = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

پس (۱) را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد :

۳! = تعداد تبدیلهای ۳ شیء

۴! = تعداد تبدیلهای ۴ شیء

۵! = تعداد تبدیلهای ۵ شیء

۶! = تعداد تبدیلهای ۶ شیء

. . . .

$n!$ = تعداد تبدیلهای n شیء

مثال ۱ ـ هرگاه بدانیم‌که :

۲۰! = ۲۰ × ۱۹!

۱۰۰! = ۱۰۰ × ۹۹!

$n! = n \times (n-1)!$

جملات ۳۰! ، ۱۰۰۰! ، $(n+1)!$ ، $(n-1)!$ و $(n-r)!$ را به‌صورت فوق‌بنویسید.

حل :

۳۰! = ۳۰ × ۲۹!

۱۰۰۰! = ۱۰۰۰ × ۹۹۹!

$(n+1)! = (n+1) \times n!$

$(n-1)! = (n-1)\,(n-2)!$

$(n-r)! = (n-r)\,(n-r-1)!$

مثال ۲ ـ هرگاه بدانیم‌که :

۳۰ × ۲۹ × ۲۸! = ۳۰!

$n(n-1)\,(n-2)! = n!$

طرف دوم تساویهای زیررا بنویسید :

۲۰ × ۱۹ × ۱۸! = ?

$(n-r)\,(n-r-1)\,(n-r-2)! = ?$

حل :

۲۰ × ۱۹ × ۱۸! = ۲۰!

$(n-r)\,(n-r-1)\,(n-r-2)! = (n-r)!$

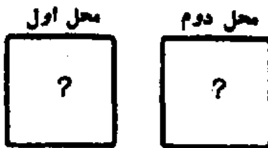
با توجه به مطالب فوق تعداد تبدیلهای n شیء مختلف هرگاه هر مرتبه تمام n شیء انتخاب شود از دستور زیر به‌دست می‌آید . $(n)_n = n!$

تعداد تبدیلهای r شیء از n شیء متمایز ($r<n$)

دربالا تعداد تبدیلهای n شیء را هرگاه درهرتبدیل تمام n شیء به‌کار برده شود دیدید. اکنون می‌خواهیم تبدیلهای n شیء را هرگاه درهرتبدیل r شیء از آنها انتخاب شود ، مورد مطالعه قرار دهیم . به مثالهای زیرتوجه‌کنید :

مثال ۱ ـ یاسمین ۸ مداد رنگی دارد و می‌خواهد ۲ مداد از میان ۸ مداد را در دو جامدادی قرار دهد ؛ به چند طریق ممکن است این کاررا انجام دهد ؟

حل : در اینجا مسئله مربوط می‌شود به پرکردن دومحل به‌صورت زیر :

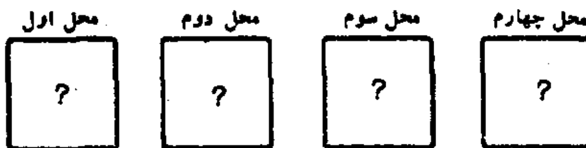


به چند طریق ممکن است مداد اول را انتخاب‌کرد؟ پس ازجادادن مداد اول به‌چندطریق ممکن است مداد دوم را جاداد؟ طبق اصل‌شمارش‌روی‌هم چند تبدیل خواهیم داشت؟ آیاجواب زیر درست است ؟

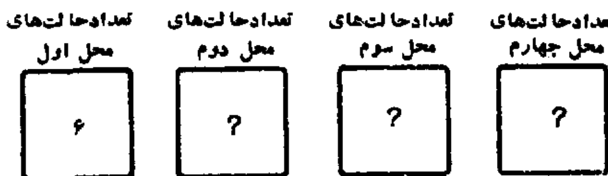
تعدادحالت‌های محل اول		تعدادحالت‌های محل دوم	
۸	×	۷	= ۵۶

مثال ۲ ـ به چند طریق می‌توان یک‌کلمهٔ ۴ حرفی را با استفاده ازحروف‌کلمهٔ « فوتبال» نوشت (تکرار حروف مجاز نیست وکلمات حاصل ممکن است بی‌معنی باشد)

حل : در اینجا ۴ محل خالی به صورت زیر داریم :



که هرکدام باید بایکی از حروف‌کلمهٔ فوتبال پرشود . چون « فوتبال » دارای ۶ حرف است، لذا محل اول باهرکدام از این ۶ حرف ممکن است پرشود :



پس از قراردادن حرف اول، ۵ حرف باقی می‌ماند ودرنتیجه محل دوم باهرکدام ازاین ۵حرف

ممکن است پرشود :

تعدادحالت‌های محل اول	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل چهارم
۶	۵	?	?

وقتی حرف دوم نیزقرارداده شد ازحروف‌کلمهٔ فوتبال فقط ۴ حرف باقی می‌ماند ودرنتیجه محل سوم باهرکدام از این ۴ حرف می‌تواند پرشود :

تعدادحالت‌های محل اول	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل چهارم
۶	۵	۴	?

وقتی حرف سوم قرارداده شد سه حرف‌باقی خواهد ماند ودرنتیجه محل چهارم باهرکدام ازاین سه حرف ممکن است پرشود :

تعدادحالت‌های محل اول	تعدادحالت‌های محل دوم	تعدادحالت‌های محل سوم	تعدادحالت‌های محل چهارم
۶	۵	۴	۳

درنتیجه تعداد تبدیلات ۴ حرف ازمیان ۶ حرف‌که به صورت $(۶)_۴$ نمایش داده می‌شودطبق اصل ضرب برابراست با :

$$(۶)_۴ = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$$

برای این‌که از این تساوی یك قانون‌کلی نتیجه بگیریم مخرج یك را برای طرف راست تساوی در نظرگرفته صورت ومخرج‌کسر حاصل را در !۲ (۲ ازتفریق ۶ و ۴ به دست آمده است) ضرب می‌کنیم :

$$(۶)_۴ = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!}$$

طبق‌آنچه‌گفته شد صورت برابر ! ۶ خواهدبود :

$$(۶)_۴ = \frac{۶!}{۲!}$$

عدد ۶ درصورت‌کسر برابرتعداد تمام حروف وعدد ۲ درمخرج برابر تفاضل ۶ و ۴ (۴ تعداد اشیای انتخاب شده است) می‌باشد . پس :

$$(۶)_۴ = \frac{۶!}{(۶-۴)!}$$

به‌همین‌ترتیب تعداد تبدیل r شیء از میان n شیء برابر است با[1] :

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۲ ـ به چند طریق می‌توان ۵ کارت را ازمیان ۳۲ کارت دریك ردیف قرار داد .

حل : طبق آنچه گفته شد داریم :

$$(۳۲)_۵ = \frac{۳۲!}{(۳۲-۵)!}$$

$$= \frac{۳۲ \times ۳۱ \times ۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸ \times ۲۷!}{۲۷!}$$

$$= ۳۲ \times ۳۱ \times ۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸ = ۲۴۱۶۵۱۲۰$$

تمرین

۱ـ حاصل ضربهای زیر را به صورت فاکتوریل بنویسید :

الف ـ $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ ؛ ب ـ $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ ؛

ج ـ $۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ ؛ د ـ $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

۲ـ طرف دیگر تساویهای زیر را به صورت حاصل ضرب اعداد بنویسید :

$۷! = ?$ ؛ $۵! = ?$ ؛ $۱۰! = ?$ ؛ $۸! = ?$

۳ـ در تساویهای زیر به جای ؟ عدد یاعبارت مناسب بگذارید :

$۵ \times ۴ \times ۳! = ?$ ؛ $۷! = ? \times ? \times ۵!$ ، $۸! = ۸ \times ?$ ؛ $۶! = ۶ \times ?$

$۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵! = ?$ ؛ $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶! = ?$

۴ـ در تساویهای زیر به‌جای « ؟ » عبارت مناسب بگذارید :

الف ـ $۵ \times (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۵ \times ?$ ؛ ب ـ $۴ \times (۳ \times ۲ \times ۱) = ۴ \times ?$

ج ـ $۱۳ \times (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۱۳ \times ?$ ؛ د ـ $۷ \times (۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۷ \times ?$

۵ـ طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید :

$۷! : ۶! = ?$ ؛ $۱۲! : ۱۰! = ?$ ؛ $۶! : ۵! = ?$

$n! : (n-۱)! = ?$ ؛ $۱۲! : ۸! = ?$ ؛ $۱۶! : ۱۴! = ?$

۶ـ تعداد تبدیلات عضوهای مجموعهٔ: { a ، b ، c ، d ، e ، f ، g } ، را بنویسید .

---

۱ ـ تعداد تبدیل‌های r شیء از میان n شیء را گاهی بصورت P_n^r نیز نمایش می‌دهند .

۷- با استفاده از فرمولهای خوانده‌شده طرف دیگر تساویهای زیررا بنویسید :

$(m)_2=?$ ؛ $(k)_2=?$ ؛ $(m)_1=?$ ؛ $(q)_3=?$ ؛ $(v)_5=?$

۸- باحروف T ، P ، S و M چند تبدیل سه حرفی می‌توان نوشت .

۹- چند کلمهٔ مختلف (بامعنی یا بی‌معنی) بااستفاده از حروف‌کلمهٔ « مولانا » می‌توان نوشت هرگاه :

الف - در هرمرتبه تمام حروف به کار رود . ب - در هرمرتبه نصف تعداد حروف به‌کار رود .

۱۰- چند تبدیل مختلف ممکن‌است باحروف A ، B ، C و D نوشت هرگاه ، حرف‌اول تبدیلهای حاصل همیشه A باشد .

ترکیب

مثال ۱ - قرار است یك‌کمیتهٔ دو نفری ازبین دانش‌آموزان « یاسمین ، فرزانه ، سوسن» تشکیل شود ؛ تعیین‌کنید به چند طریق مختلف اعضای این‌کمیته ممکن است انتخاب شود .

روشن است که یك انتخاب « یاسمین ، سوسن » خواهد بود . آیا می‌توانید انتخابهای دیگری را نام ببرید؟ آیا غیراز انتخابهای « یاسمین، سوسن » ، « سوسن، فرزانه » ، « یاسمین، فرزانه » انتخاب دیگری برای این‌کمیته می‌دانید ؟

از نظر تبدیل بحث فوق تبدیل دونفر از میان ۳ نفر است و این تبدیلها عبارتند از :

« فرزانه ، سوسن » ؛ « یاسمین ، فرزانه » ، « یاسمین ، سوسن »

« سوسن ، فرزانه » ؛ « فرزانه ، یاسمین » ؛ « سوسن ، یاسمین »

ولی ازنظرترکیب « سوسن ، فرزانه » و « فرزانه ، سوسن » هردوتشکیل یك کمیته‌می‌دهند . به عبارت دیگر ، تقدم وتأخر آنها تغییری درکمیته نمی‌دهد . پس برای این کمیته سه انتخاب زیررا خواهیم داشت :

« فرزانه ، سوسن » ؛ « یاسمین ، فرزانه » ؛ « یاسمین ، سوسن » .

در انتخاب کردن هرگاه ترتیب انتخاب مهم نباشد هرکدام از حالت‌های انتخاب را یك «ترکیب» می‌نامند . درمثال بالا هرکدام ازانتخاب‌ها یك «ترکیب» ۲ نفرازمیان ۳نفر می‌باشد.

مثال ۲ - چهارکتاب باحروف A ، B ، C و D مشخص شده‌اند؛ تعیین‌کنید به‌چند طریق ممکن است :

الف - سه‌کتاب را از میان ۴ کتاب درسه محل خالی قرارداد .

ب - سه‌کتاب را ازمیان ۴ کتاب برای هدیه دادن به یك نفر انتخاب‌کرد.

همان طورکه دیدید ، درقرار دادن کتابها در محل خالی تقدم و تأخرکتابها در نظرگرفته می‌شود ، درنتیجه برای پرکردن سه محل خالی با ۴ کتاب باید از تبدیل ۳ شیء از ۴ شیء استفاده کرد :

$$(۴)_۳ = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = \frac{۴!}{۱!} = \frac{۴!}{۱} = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

این تبدیلها عبارتند از :

ABC	ACB	BCA	BAC	CAB	CBA
ACD	ADC	CDA	DAC	CAD	DCA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
BCD	BDC	CDB	CBD	DBC	DCB

پ ـ در انتخاب ۳ کتاب ازمیان ۴ کتاب به منظور هدیه دادن ، واضح است که تقدم و تأخرکتابها نقشی ندارد. به‌عبارت دیگر، تبدیلهای ABC، ACB، BCA، BAC، CBA، CAB همگی سه‌کتاب A ، B و C ویا یك انتخاب برای هدیه دادن مشخص می‌سازند . لذا حالت‌های انتخابهای ۳کتاب ازمیان ۴ کتاب برای اهدا برابر است با :

ABC ، ACD ، ABD ، BCD

هرکدام از انتخابهای فوق یك ترکیب ۳ حرف از ۴ حرف می‌باشد .

تعریف ــ یك ترکیب r شیء از n شیء متمایز عبارت‌است از انتخاب r شیء ازاین اشیا بدون جایگذاری مجدد وبدون درنظر گرفتن ترتیب آنها .

توجه کنید که درتبدیل اگر ترتیب قرارگرفتن اشیا راعوض کنیم یك‌حالت جدید بدست می‌آید درصورتیکه جابجا کردن اشیا در ترکیب حالت جدیدی را بوجود نمی‌آورد .

تعداد ترکیب‌های ۳ حرف از ۴ حرف A ، B ، C و D برابر با تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{A, B, C, D\}$ است بطوریکه می‌دانید ترتیب نوشتن عضوها در یك مجموعه مهم نیست . زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه چهارعضوی بالاعبارتند از :

$\{A,B,C\}$, $\{A,C,D\}$, $\{B,C,D\}$, $\{A,B,D\}$

که تعداد آنها با تعداد ترکیب‌های ۳ حرف از ۴ حرف برابر است .

تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء متمایز

مثال ۱ ـ دیدیدکه ترکیبهای ۳ کتاب از میان ۴ کتاب A ، B ، C و D عبارتند از :

ABC ، ACD ، ABD ، BCD .

در اینجا هرترکیب شامل سه شیء است . و طبق آنچه راجع به تبدیل گفته شد ، تعداد تبدیلهای هریك ازاین سه شیء برابر !۳ است . به عبارت دیگر ازهرترکیب !۳ تبدیل به‌دست می‌آید . این مطلب ازروی جدول زیر به‌خوبی دیده می‌شود :

ترکیبها	تبدیلهای حاصل					
ABC	ABC	ACB	BCA	BAC	CAB	CBA
ACD	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ABD	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
BCD	BCD	BDC	CDB	CBD	DBC	DCB

پس طبق آنچه گفته شد داریم :

تعداد تبدیلها = (تعداد ترکیبها) × !۳

هرگاه تعداد ترکیبهای ۳ شیء از ۴ شیء را به‌صورت $\binom{۴}{۳}$ نمایش دهیم ، خواهیم داشت :

$$۳! \times \binom{۴}{۳} = (۴)_۳$$

و یا :

$$\binom{۴}{۳} = \frac{(۴)_۳}{۳!}$$

به جای صورت کسر طرف راست مقدارش را قرار می‌دهیم :

$$\binom{۴}{۳} = \frac{\frac{۴!}{(۴-۳)!}}{۳!}$$

و یا :

$$\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳!(۴-۳)!} \qquad \text{(الف)}$$

چه ارتباطی بین ۴ و ۳ داخل پرانتز و ۴ و ۳ صورت ومخرج می‌بینید ؟

مثال ۲ ـ به‌چند طریق می‌توان ۲ حرف را از حروف a ، b ، c ، d و e انتخاب کرد (ترکیب ۲ شیء از ۵ شیء) تعداد تبدیلهای ۲ حرف از ۵ حرف را به صورت $(۵)_۲$ نشان دادیم . از طرفی دیدیم که هرترکیب دو حرفی به تعداد !۲ تبدیل به وجود می‌آورد ؛ پس داریم :

$$۲! \times \binom{۵}{۲} = (۵)_۲$$

و یا :

$$\binom{۵}{۲} = \frac{(۵)_۲}{۲!}$$

به‌جای $(۵)_۲$ مقدارش را قرار می‌دهیم :

$$\binom{۵}{۲} = \frac{\frac{۵!}{(۵-۲)!}}{۲!}$$

و یا :

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!(۵-۲)!} \qquad (ب)$$

در تساویهای الف و ب بالا دیده می‌شود که‌کسرهای طرف راست از سه عـدد تشکیل شده‌اند ؛ عدد صورت برابر تعدادکل اشیای مورد بحث است؛ اما اعداد مخرج به‌ترتیب عدهٔ اشیای انتخاب شده وتفاضل‌کل اشیا از این عدد می‌باشد .

باروشی کاملاً متشابه می‌توان فرمول تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء را به‌دست‌آورد:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

در اینجا n تعدادکل اشیا و r تعداد اشیای انتخاب شده است[۱] . در حقیقت این فرمول تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یك مجموعهٔ n عضوی را به دست می‌دهد .

مثال ۳ ـ به چند طریق می‌توان یك‌کمیتهٔ ۵ نفری را از میان ۹ نفر انتخاب‌کرد ؟

حل :

$$\binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵!(۹-۵)!}$$

$$= \frac{۹!}{۵!\times۴!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\times۴\times۳\times۲\times۱}$$

$$= \frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱} = ۱۲۶$$

مثال ۴ ـ نشان دهیدکه تساویهای زیر درست است :

الف ـ $\binom{n}{۰}=۱$ ؛ ب ـ $\binom{n}{۱}=n$ ؛ ج ـ $\binom{n}{n}=۱$ ؛ د ـ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

۱ـ تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء را با C_n^r نیز نشان می‌دهند .

حل : طبق دستورکلی داریم :

الف ـ
$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{1\times n!}=1$$

ب ـ
$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{1\times(n-1)!}=n$$

ج ـ
$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\,0!}=\frac{n!}{n!}=1$$

د ـ
$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\binom{n}{r}$$

تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء برابر است با تعداد ترکیبهای n − r شیء از n شیء .

مثال ۵ ـ به چند طریق مختلف ممکن است یك کمیتهٔ سه‌نفری را ازمیان ۴ زوج (زن و شوهر) انتخاب کرد هرگاه :

الف ـ محدودیتی درانتخاب آنها وجود نداشته باشد .

ب ـ کمیته باید از ۲ زن و یك مرد تشکیل شده باشد .

حل : الف ـ درانتخاب عضوهای کمیته تقدم وتأخرعضوهادرنظر گرفته نمی‌شود .بنابراین در اینجا منظور تعیین تعداد ترکیبهای ۳ شیء از ۸ شیء است که با توجه به فرمول خوانده شده عبارت است از :

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!\,5!}=56$$

ب ـ دو زن از میان ۴ زن می‌تواند به $\binom{4}{2}$ طریق انتخاب شود ؛ بعد ازاین‌که دوزن با یکی ازاین طرق انتخاب شد ، یك مرد ازمیان ۴ مرد نیز می‌تواند به $\binom{4}{1}$ طریق انتخاب گردد ؛ درنتیجه بنا براصل ضرب تعداد راهها برای انتخاب دو زن و یك مرد برابراست با :

$$\binom{4}{2}\times\binom{4}{1}=24$$

تمرین

۱ـ تعداد ترکیبهای زیررا حساب کنید :

$$\binom{7}{3}\ ;\ \binom{6}{5}\qquad\binom{11}{7}\ ;\ \binom{12}{11}$$

۲ـ با استفاده از دستور خوانده شده درستی تساویهای زیررا نشان دهید .

$$\binom{11}{7}=\binom{11}{4} \ ، \ \binom{4}{3}=\binom{4}{1} \ ، \ \binom{8}{5}=\binom{8}{3} \ ، \ \binom{6}{6}=\binom{6}{0}$$

۳ـ با استفاده از دستور خوانده شده درستی تساویهای زیررا نشان دهید :

$$\binom{5}{3}=\binom{4}{3}+\binom{4}{2} \ ، \ \binom{7}{5}=\binom{6}{5}+\binom{6}{4} \ ، \ \binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

۴ـ هرگاه $\binom{n}{n-3}=10$ ، تعیین کنید مقدار n را .

۵ـ هرگاه $\binom{n}{r}=10$ و $(x)_r=60$ ؛ تعیین کنید مقادیر n و r را .

۶ـ قرار است یك کمیتهٔ ۵ نفری از میان ۱۲ نفردانش‌آموز انتخاب شود . تعیین کنید به چند طریق می‌توان عضوهای این کمیته را انتخاب کرد .

۷ـ ۵ نفر دانش‌آموزکه ۳ نفرآنها کلاس اول ودونفر کلاس سوم است ، برای انتخاب در یك کمیتهٔ دو نفری در نظر گرفته شده‌اند ؛ تعیین کنید تعداد راههای ممکن برای انتخاب این کمیته را هرگاه :

الف ـ دوعضو کمیته دانش‌آموز کلاس اول باشند . ب ـ یك عضو کمیته دانش‌آموز کلاس اول وعضو دیگر کلاس سوم باشد .

۸ـ خواربار فروشی ۵ نوع آشامیدنی مختلف دارد. شخصی می‌خواهد ۲ نوع آشامیدنی برای مهمانان خود انتخاب کند ؛ تعیین کنید : الف ـ تعداد انتخابهای اورا ، ب ـ دوانتخاب $\binom{5}{3}$ و $\binom{5}{2}$ چه فرقی دارند ؟

۹ـ یك کیسه محتوی ۷ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سفید است ؛ تعیین کنید به چند طریق می‌توان ۶ مهره متشکل از ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سفید را از این کیسه انتخاب کرد .

۱۰ـ به چند طریق می‌توان یك کمیته را از میان ۷ نفر زن و ۶ نفر مرد انتخاب کرد هرگاه قرار باشد اعضای کمیته از ۳ زن و ۲ مرد تشکیل گردد .

۱۱ ـ شخصی ۸ تمبر ایرانی متمایز و ۱۰ تمبر خارجی متمایز دارد ؛ تعیین کنید او به‌چند طریق می‌تواند ۳ تمبر ایرانی و سه تمبر خارجی را از میان آنها انتخاب نماید .

فصل پنجم

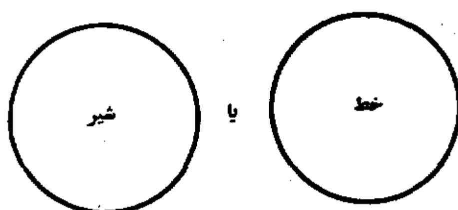
احتمال

تجربه تصادفی

بعضی‌از تجربه‌ها هستند که نتیجه آنها از قبل کاملاً مشخص است . مثلاً وقتی سنگی را پرتاب کنیم این سنگ به‌زمین می‌افتد و یا اگر مقداری آب را به‌اندازه معینی حرارت دهیم‌آب تبدیل به بخار می‌گردد . در مقابل تجربه‌های دیگری وجود دارد که نتیجه آنها را نمی‌توان از قبل به‌دقت تعیین نمود وفقط پس‌از انجام تجربه نتیجه آنها مشخص می گردد . اینگونه تجربه‌ها را تجربه تصادفی می‌نامند .

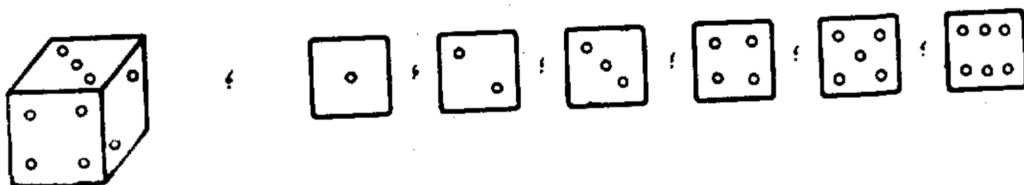
برای روشن شدن مطلب به‌مثالهای زیر توجه کنید :

۱ - هر گاه یك سکه را به هوا بیندازیم، این سکه در فرود آمدن شیر یا خط می‌نشیند . به عبارت دیگر ، درپرتاب سکه دو نتیجه ممکن است به دست‌آید ، شیر یاخط . تنها پس‌ازنشستن سکه می‌توان گفت که آن سکه شیر یا خط نشسته است .

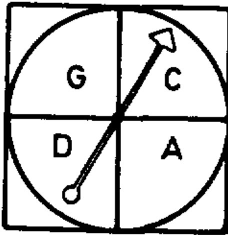


۲- یك دسته کارت موجود است ؛ نام هریك از دانش‌آموزان یك‌کلاس را روی یك‌کارت نوشته پس ازمخلوط‌کردن کارتها ، یك‌کارت را به طور قرعه برمی‌داریم؛ روشن‌است‌که نام‌یکی از دانش‌آموزان دراین قرعه بیرون خواهدآمد ؛ نتیجهٔ ممکن از این قرعه بیرون‌آمدن نام یك دانش‌آموز است . تنها پس ازکشیدن قرعه می‌توان‌گفت‌که نام‌کدام یك ازدانش‌آموزان بیرون آمده است .

۳- یك تاس را می‌ریزیم ؛ نتیجه ممکن پس ازنشستن تاس روشدن یکی از اعداد ۱ تا۶ است ، ولی قبل ازنشستن تاس به‌هیچ وجه نمی‌توان‌گفت‌که تاس به طور قطع روی چه‌پهلویی روخواهد شد .



۴ـ در دستگاه زیر صفحهٔ دایره‌ای به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ این قسمتها با رنگهای قرمز (G) ، سفید (C) ، سبز (D) وآبی (A) ازیکدیگر متمایز شده‌اند ؛ هرگاه عقربهٔ دستگاه را که روی یك سوزن در مرکز صفحه قرار داده بچرخانیم ، پس از چرخش، عقربه دریکی از این چهار ناحیه متوقف خواهد شد[1] ؛ ولی قبل از توقف کامل عقربه ، به هیچ وجه نمی‌توان گفت که عقربه روی کدام ناحیه توقف خواهد کرد .



۵ـ کیسه‌ای محتوی یك مهرهٔ قرمز ، یك مهرهٔ سیاه و یك مهرهٔ سفید است ؛ هرگاه یك مهره را از داخل کیسه بیرون آوریم ، نتیجهٔ ممکن عبارت خواهد بود از یك مهرهٔ قرمز یا سفید یا سیاه .

پرتاب سکه ، کشیدن قرعه ، انداختن تاس ، چرخش عقربه روی صفحهٔ رنگی یا مدرج و بیرون کشیدن مهره از کیسه نمونه‌هایی از تجربه‌های تصادفی هستند . در این نوع تجربه‌ها قبل از معلوم شدن نتیجه به‌طور قطع نمی‌توان تعیین کرد که کدام یك از نتایج ممکن این‌تجربه به دست خواهد آمد .

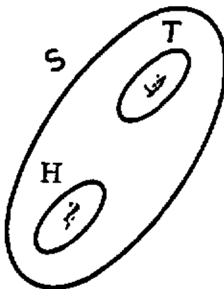
مطالعه پدیده‌های تصادفی حساب احتمالات را تشکیل می‌دهد . ما دراینجا حساب احتمالات را در یك حالت ساده مورد مطالعه قرار می‌دهیم . بخصوص برای ساده شدن مطالب فرض می‌کنیم که تعداد نتایج تجربه‌های تصادفی که با آنها سروکار داریم متناهی می‌باشد .

فضای نمونه‌ای

۱ـ یك سکه به هوا انداخته می‌شود . این سکه در فرودآمدن شیر (H) یاخط (T) می‌نشیند[2] ؛ مجموعهٔ :

$$S=\{H , T\}$$

که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد ، به نام فضای نمونه‌ای تجربه تصادفی نامیده می‌شود . هر کدام از عضوهای H یا T به‌نام یك نقطه از فضای نمونه‌ای خوانده می‌شود .



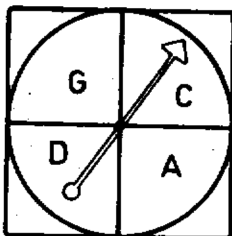
۲ـ یك تاس ریخته می‌شود ، بعدازنشستن این تاس یکی از وجه‌های ۱ تا ۶ روخواهدشد

---

۱ ـ حالات استثنایی توقف عقربه روی مرزها در نظر گرفته نمی‌شود .

۲ـ H حرف اول کلمه **Head** بمعنی شیر و T حرف اول کلمهٔ **Tail** بمعنی خط می‌باشد.

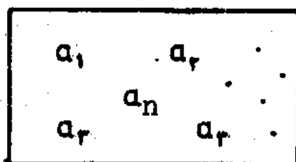
مجموعهٔ : $S = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ \}$ ، که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد ، به نام فضای نمونه‌ای این تجربه خوانده می‌شود . این مجموعه دارای ۶ عضو است .



۳ـ در دستگاه متقابل عقربه را به‌چرخش درمی‌آوریم؛ مجموعهٔ :

$$S = \{ G ، C ، A ، D \}$$

که تمام نتیجه‌های ممکن این تجربه را نشان می‌دهد به نام فضای نمونهٔ تجربه خوانده می‌شود .



۴ـ درپاسخ دادن به‌پرسشهای دوجوابی،

فضای نمونه‌ای عبارتست از $S = \{$ نه ، بلی $\}$

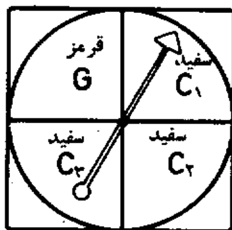
تعریف ـ هرگاه $a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . ، a_n همهٔ نتیجه‌های ممکن یك تجربه تصادفی باشد مجموعهٔ :

$$S = \{ a_۱ ، a_۲ ، . . . ، a_n \}$$

به نام فضای نمونه‌ای خوانده می‌شود . هر عضو S یك نقطه از فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود .

پیشامد تصادفی

گفتیم که در ریختن یك تاس فضای نمونه‌ای برابر است با $S = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۶ \}$ هرگاه دراین تجربه ، روشدن یکی‌از پهلوها که روی‌آن شماره زوج نوشته شده است مطلوب ما باشد مجموعهٔ $A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ \}$ که تمام نتیجه‌های مطلوب را نشان می‌دهد ، به نام یك پیشامد تصادفی خوانده می‌شود . روشن است که $A \subset S$.

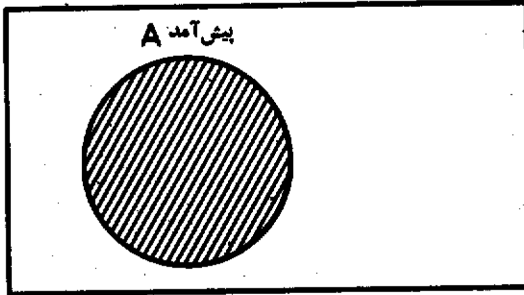


در شکل مقابل هرگاه توقف عقربه در ناحیهٔ سفید مطلوب باشد ، مجموعهٔ $B = \{ C_۱ ، C_۲ ، C_۳ \}$ ، که تمام نتیجه‌های مطلوب را نشان می‌دهد به نام یك پیشامد تصادفی خوانده می‌شود .

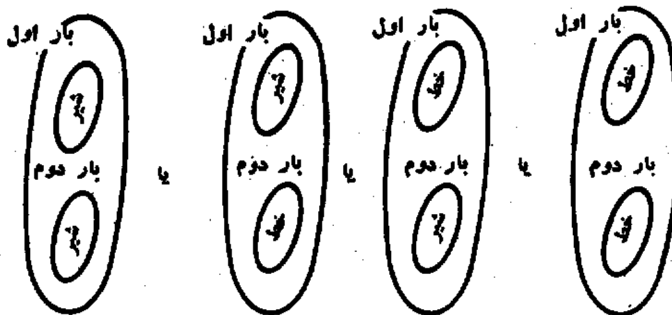
تعریف ۱ ـ دریك‌تجربه تصادفی پیشامد تصادفی زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای‌آن تجربه است . به عبارت دیگر ، هرگاه S فضای نمونهٔ تجربه تصادفی باشد ، A یك پیشامد تصادفی خوانده می‌شود، اگر و فقط اگر $A \subset S$.

تعریف ۲ ـ اگر A پیش‌آمدی از یك‌تجربه تصادفی معین باشد ،در هر بار انجام‌این‌تجربه گفته می‌شود پیش‌آمد A رخ داده است هرگاه نتیجه به‌دست آمده عضو A باشد .

مثال ۱ ـ یك سکه دوبار به هوا انداخته می‌شود ، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی را که عبارت از ظاهر شدن شیر در هردوبار پرتاب یا ظاهرشدن خط در هر دوبار پرتاب باشد بنویسید .



حل : این سکه‌ها در موقع نشستن به یکی از صورتهای زیر رو خواهد شد :

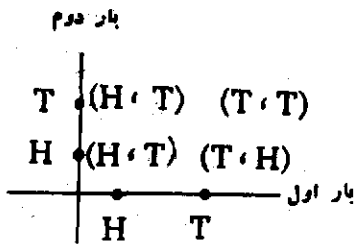


هرگاه نتیجه شیر آمدن سکه را با H ونتیجهٔ خط آمدن آنرا با T نشان‌دهیم ، مجموعهٔ نتیجه‌هابرای هر بار پرتاب برابر $A = \{H ، T\}$ است،باتوجه به‌آنچه درحاصل‌ضرب دکارتی مجموعهٔ A در خودش گفتیم ، حالات مختلفی‌که‌سکه در دوبارممکن است باهم به زمین بنشیند و یا به‌عبارت دیگرفضای نمونه‌ای این تجـربه برابر است با :

$$S = \{(H ، H) ، (H ، T) ، (T ، H) ، (T ، T)\}$$

بار اول \ بار دوم	H	T
H	(H ، H)	(H ، T)
T	(T ، H)	(T ، T)

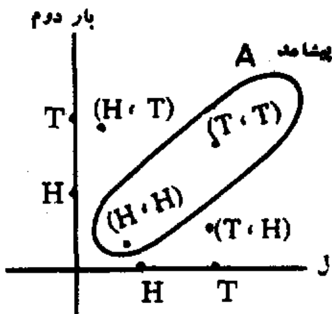
برای بدست آوردن فضای نمونه‌ای می‌توان از نمودار صفحهٔ‌بعد نیز استفاده کرد.



دراین تجربه پیشامد تصادفی A یعنی شیر آمدن هر دومرتبه یا خط آمدن هردومرتبه عبارت است از :

$$A=\{(H ، H) \ (T ، T)\}$$

پیشامد A زیرمجموعه‌ای ازفضای نمونه‌ای S است.

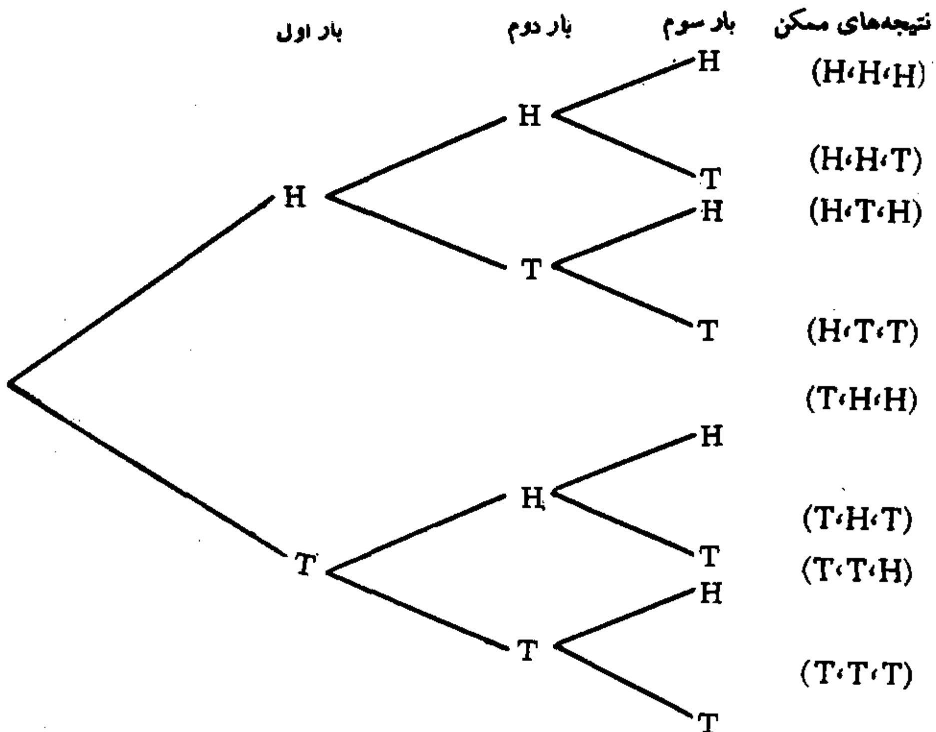


این پیشامد در شکل مقابل نشان داده شده است .

مثال ۲ ـ یك سکه سه‌بار پرتاب می‌شود.

مطلوب است تعیین : الف ـ فضای نمونـه‌ای این تجربه تصادفی. بـ پیشامد A که درآن سکه هر سه‌بار خط بیاید. ج‌ـ پیشامد B که درآن فقط یك خط بیاید .

حل :دراین تجربه عضوهای فضای نمونه‌ای به صورت زیر مشخص می‌شوند :



درنتیجه فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی عبارت است از :

$$S=\{(H،H،H) ، (H،H،T) ، (H،T،H) ، (H،T،T) ، (T،H،H) ، (T،H،T) ، (T،T،H) ، (T،T،T)\}$$

و پیشامدهای خواسته شده عبارتند از :

$$A=\{(T،T،T)\}$$

$$B=\{(H،H،T) ، (H،T،H) ، (T،H،H)\}$$

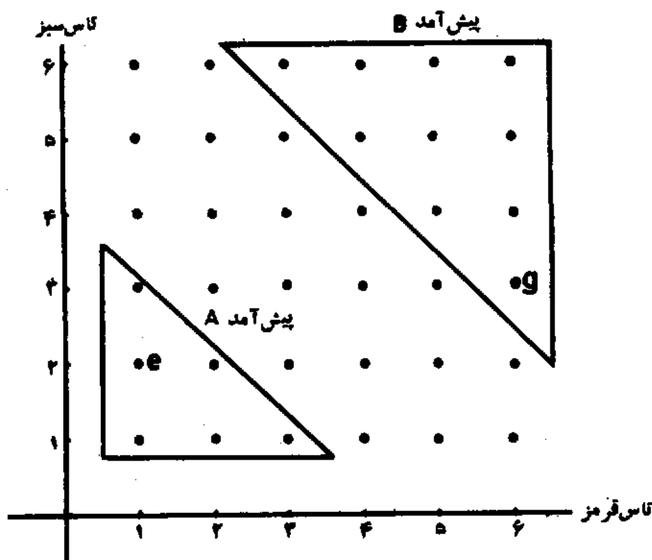
مثال ۳ ـ یک تاس قرمز و یک تاس سبز باهم ریخته می‌شوند ؛ الف ـ فضای نمونه‌ای این تجربه را بانمودار مختصاتی نشان دهید . ب ـ پیشامد A که درآن مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۴ یا مساوی ۴ است مشخص کنید .

ج ـ پیشامد B را که درآن مجموع اعداد روی دو تاس از ۸ بیشتر باشد بنویسید .

حل : فرض کنیم $K=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶\}$. فضای نمونه‌ای این تجربه عبارت از $K\times K$ است که دارای ۳۶ عضو می‌باشد . یعنی :

$$S=\{(a , b)\,|\,a , b\in K\}$$

نمودار مختصات فضای نمونهٔ این تجربه در زیر رسم شده‌است . نقطهٔ e در شکل نشان می‌دهد که تاس قرمز یک وتاس سبز ۲ آمده است.همچنین نقطهٔ g نشان می‌دهدکه تاس قرمز ۶ وتاس سبز ۳ آمده‌است.



هرگاه هرکدام از نقطه‌های نمونه را به صورت (a ، b) که درآن a عـدد تاس قرمز و b عدد تاس سبز است نشان دهیم پیشامدهای A و B که در شکل بامثلث مشخص شده‌اند ؛

به صورتهای زیر خواهند بود :
$$A = \{ (a , b) | a , b \in k , a+b < ۴ \}$$
$$B = \{ (a , b) | a , b \in k , a+b > ۸ \}$$

خلاصه ـ طبق آنچه دیدید می‌توان گفت :

الف ـ تجربه‌ای را که در هربار انجام آن نتیجه بدست آمده یکی از چند صورت مختلف و معلوم بوده ولی قبل از انجام آن نتوان نتیجه حاصل را بطور قطع معلوم کرد به‌نام تجربه تصادفی خوانده می‌شود .

ب ـ مجموعهٔ حاصل از تمام نتیجه‌های ممکن یك تجربه به نام فضای نمونه‌ای آن تجربه خوانده می‌شود .

ج ـ هر کدام از نتایج به دست آمده از یك تجربه ، یك عضو فضای نمونه است .

د ـ هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای به‌نام یك پیشامد تصادفی خوانده می‌شود .

تمرین

۱ـ هریك از حروف کلمهٔ «فردوسی» را روی یك کارت نوشته پس ازمخلوط کردن کارتها یکی ازآنها را به طور قرعه بر می‌داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف ـ فضای نمونه‌ای این تجربه ، ب ـ پیشامد آن که روی کارت بیرون آمده حرف بی‌نقطه باشد .

۲ـ هریك از ارقام یك تا ۹ را روی یك کارت نوشته پس از مخلوط کردن کارتها یکی از آنها را به طور قرعه برمی‌داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف ـ فضای نمونه‌ای تجربه . ب ـ پیشامد A ، که درآن عدد روی کارت کشیده شده کوچکتر از ۶ باشد . ج ـ پیشامد B ، که درآن عدد روی کارت بیرون آمده اول باشد . د ـ پیشامد E که درآن عدد روی کارت کشیده شده بزرگتر از ۶ باشد .

۳ـ یك سکه را دوبار می‌اندازیم ؛ فضای نمونه‌ای این تجربه وپیشامد آن را که سکه اقلاً یك‌بار شیر بیاید بنویسید .

۴ـ یك سکه را سه‌بار می‌اندازیم ؛ فضای نمونه‌ای این تجربه وپیشامد آن را که اقلاً یك‌بار شیر بیاید بنویسید .

۵ـ یك تاس و یك سکه را به‌هوا می‌اندازیم ؛ فضای نمونه‌ای این تجربه وپیشامد آن را که سکه شیر یا تاس ۶ بیاید بنویسید .

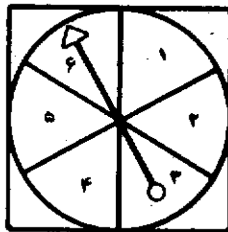
۶ـ فضای نمونه‌ای $S = \{a , b , c\}$ مفروض است ؛ دو پیشامد مختلف این فضا را بنویسید . این فضای نمونه‌ای حداکثر دارای چند پیشامد است ؟

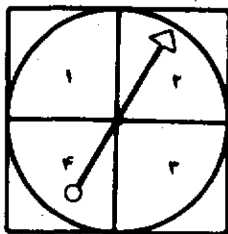
۷ـ یك کیسه محتوی ۱۵ مهرهٔ سیاه و ۱۰ مهرهٔ سفید است ؛ یك مهره را به‌طورتصادفی از داخل کیسه بیرون می‌آوریم ؛ این مهره مسلماً سفید (c) یا سیاه (m) خواهد بود . آیا

مجموعهٔ $\{c , m\}$ می‌تواند نمایش فضای نمونه‌ای این تجربه باشد ؟ توضیح دهید .

۸ـ در دو دستگاه زیر ، عقربه‌ها را باهم به‌حرکت درمی‌آوریم ؛ مطلوب است :

الف ـ نمایش فضای‌نمونه‌ای این تجربه با کمک نمودار مختصاتی .





ب ـ پیشامد A ، وقتی که هر دو عقربه روی یك عدد متوقف شوند .

ج ـ پیشامد B ، وقتی‌که هر دو عقربه روی عدد زوج متوقف شوند .

احتمال

درقسمتهای قبل تعریف فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی را دیدیم . اکنون می‌خواهیم بهرپیشامد تصادفی عددی نسبت دهیم و بوسیله آن شانس وقوع آن پیشامد را بسنجیم . در اینجا ، ساده‌ترین حالت را برای تعریف احتمال درنظر می‌گیریم . بدین ترتیب که اولاً فرض می‌کنیم که تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای متناهی بوده و این عضوها متمایز می‌باشند . ثانیاً شانس ظاهرشدن کلیه عضوهای فضای نمونه‌ای یکسان می‌باشد .

برای روشن شدن مطلب به‌مثالهای زیر توجه کنید :

۱ـ در پرتاب یك سکه سالم[1] فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{H , T\}$$

تعداد عضوهای این فضای نمونه متناهی بوده وبرابر ۲ می‌باشد . از طرف دیگر این عضوها متمایز بوده وشانس واقع شدن عضوها باهم برابر است .

۲ـ درپرتاب یك تاس سالم یکبار فضای نمونه‌ای دارای شش عضو است :

$$S=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$$

و شانس واقع شدن هریك از عضوها مساوی است .

۳ـ در پرتاب دوتاس باهم فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ نقطه است . این فضای نمونه عبارت است از :

$$S=\{(a , b) | a , b \in K\}$$

که درآن $K=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$ ، شانس وقوع کلیه نقاط این فضای نمونه‌ای یکسان می‌باشد .

۱ـ سکه سالم سکه‌ای است که به هنگام پرتاب شانس شیر یا خط آمدن آن مساوی باشد.

درهمه فضاهای نمونه‌ای بالا تعداد عضوهای این فضاهای نمونه‌ای متناهی بوده و این عضوها متمایز می‌باشد وهمچنین شانس واقع شدن کلیه عضوها برابر است .

هر زیرمجموعه از این فضای نمونه‌ای یك پیشامد تصادفی می‌باشد . مثلاً در پرتاب سکه یکبار

$A=\{H\}$

یك پیشامد تصادفی است‌که عبارت ازظاهرشدن شیر می‌باشد . درپرتاب تاس یکبار

$B=\{۱,۳,۵\}$

پیشامدی است‌که عبارت ازظاهرشدن عدد فرد است وبالاخره درپرتاب دوتاس باهم یکبار

$C=\{(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ و $(۲,۱)\}$

پیشامدی است‌که درآن مجموع شماره‌های ظاهرشده کمتر از ۴ می‌باشد .

اکنون که مفهوم فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی روشن شد احتمال را تعریف می‌کنیم .

تعریف — اگرعدهٔ عضوهای فضای نمونه‌ای متناهی بوده وشانس ظاهرشدن این عضوها مساوی باشد احتمال هرپیشامد تصادفی مانند A که با P(A) نشان داده می‌شود برابر است با

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد عضوهای } A}{\text{تعداد عضوهای } S}$$

باتوجه به‌اینکه همواره $۰\leqslant n(A)\leqslant n(S)$ است همیشه $۰\leqslant P(A)\leqslant ۱$ خواهد بود یعنی هرپیشامد عددی است بین صفر ویك .

مثال ۱ — یك سکه را یکبار پرتاب می‌کنیم . اگر پیشامد A عبارت‌از ظاهرشدن شیر باشد دراینصورت

$S=\{H,T\}$ و $A=\{H\}$

وبنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$$=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲ — یك تاس را یکبار پرتاب می‌کنیم . اگر پیشامد B عبارت ازظاهرشدن عدد فرد باشد داریم :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$

بنابراین :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳ ـ دوتاس را یکبار باهم پرتاب می‌کنیم . اگر C پیشامدی باشد که درآن مجموع شماره‌های دوتاس کمتر از ۴ باشد خواهیم داشت :

$S=\{(a,b)|a,b\in K\}$ و $K=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

و

$C=\{(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ و $(۲,۱)\}$

پس :

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}$$

$$=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

مثال ۴ ـ سه سکه سالم باهم انداخته می‌شود . مطلوب است :

الف ـ احتمال آنکه هرسه سکه شیر بیاید .

ب ـ احتمال آنکه فقط یکی از سکه‌ها شیر بیاید .

حل ـ وقتی سه سکه باهم انداخته می‌شود فضای نمونه‌ای عبارت است از :

$$S=\{(H،H،H)،(H،H،T)،(H،T،H)،(H،T،T)،(T،H،H)، (T،H،T)،(T،T،H)،(T،T،T)\}$$

الف ـ فرض کنید A پیشامد آمدن سه شیر باهم باشد ، دراینصورت

$A=\{(H،H،H)\}$ و

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$$=\frac{۱}{۸}$$

ب ـ اگر B پیشامد آمدن فقط یك شیر باشد ، آنگاه داریم :

$B=\{(H،T،T)،(T،H،T)،(T،T،H)\}$

و

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$=\frac{۳}{۸}$$

مثال ۵ ـ تمام ترکیبات سه حرفی مجموعهٔ { a ، b ، c ، d } را روی کارتهای مختلف نوشته (هرترکیب روی یك کارت) پس ازمخلوط کردن ، یك کارت را به طور قرعه برمی‌داریم؛ احتمال آن که حرف b روی این کارت باشد چیست ؟

حل : ترکیبات سه حرفی مجموعهٔ { a ، b ، c ، d } ، طبق آنچه گفته شد برابراست با:

$$S = \{ abc , acd , abd , bcd \}$$

هرگاه A پیشامد مطلوب باشد داریم :

$$A = \{ abc , abd , bcd \}$$

در نتیجه احتمال آن برابراست با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۶ــ یك کیسه محتوی ۵ مهره قرمز ، ۳ مهره سیاه و ۲ مهرهٔ سفید است .

یك مهره را بطور تصادفی ازکیسه بیرون می‌آوریم .

الف ـ فضای نمونه‌ای این تجربه را بنویسید .

ب ـ پیدا کنید احتمال اینکه این مهره قرمز باشد .

ج ـ میدانیم که مهره انتخاب‌شده قرمز است. بدون‌آنکه این مهره را به‌کیسه برگردانیم مهره دیگری را به‌طور تصادفی ازکیسه بیرون می‌آوریم . پیدا کنید احتمال اینکه این مهره نیز قرمز باشد .

حل : الف ـ واضح است که مهرهٔ بیرون آمده ازنظر رنگ ، قرمز (g) ، سیاه (m) یا سفید (c) می‌باشد ، و حال آن که نتیجهٔ ممکن تجربه بیرون آمدن یکی از مهره‌های داخل کیسه است · به عبارت دیگر دراینجا مجموعهٔ {g ، m ، c} فضای نمونه‌ای نبوده بلکه برای تعیین فضای نمونه‌ای تجربه باید ابتدا مهره‌های همرنگ را بااستفاده اززیرنویس متمایز نمود (مثلاً ۲ مهرهٔ سفید را با c_1 و c_2 نشان داد) ، بااین قرارداد فضای نمونه‌ای تجربه برابر است با :

$$S = \{ g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 , m_1 , m_2 , m_3 , c_1 , c_2 \}$$

ب ـ هرگاه A نمایش پیشامدآن باشدکه مهرهٔ بیرون‌آمده قرمز است ، خواهیم داشت :

$$A = \{ g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 \}$$

درنتیجه احتمال A برابر است با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

یعنی احتمال آن‌که مهرهٔ بیرون آمده قرمز باشد برابر است با تعداد مهره‌های قرمز در کیسه تقسیم برتعدادکل مهره‌ها .

ج ـ هرگاه مهرهٔ قرمز به‌کیسه برگردانده نشود ، فضای نمونه‌ای تجربه تغییرکرده و فضای نمونه‌ای جدید برابر می‌شود با :

$$S_1=\{g'_1 , g'_2 , g'_3 , g'_4 , m_1 , m_2 , m_3 , c_1 , c_2\}$$

که درآن g'_1 ، g'_2 ، g'_3 و g'_4 مهره‌های قرمز باقیمانده می‌باشند .

هرگاه B نمایش پیشامد آن باشدکه مهرهٔ بیرون‌آمده قرمز باشد ، خواهیم داشت :

$$B=\{g'_1 , g'_2 , g'_3 , g'_4\}$$

درنتیجه احتمال B برابر است با

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S_1)}=\frac{4}{9}$$

مثال ۷ ـ یك‌کیسه محتوی ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است ؛ دومهره به طور تصادفی ازکیسه بیرون‌آورده می‌شود ؛ مطلوب است احتمال‌آن‌که هردو مهره آبی‌باشد .

دراینجا ما می‌خواهیم دومهرهٔ آبی را از میان ۴ مهرهٔ آبی انتخاب‌کنیم ؛ پس‌تعداد انتخابها برابر است با $\binom{4}{2}$. ازطرفی تعداد نقاط فضای نمونه‌ای تجربه برابر است با تعدادترکیبهای ۲ مهره از ۹ مهره : $\binom{9}{2}$ ؛ پس احتمال آن‌که هردو مهره آبی باشد برابر است با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{9!}{2!\,7!}}=\frac{4\times3}{9\times8}=\frac{1}{6}$$

مثال ۸ ـ ازمیان ۲۲ نفر دانش‌آموز قرار است ۸ نفربرای تشکیل انجمن ورزش‌دبیرستان انتخاب شوند ؛ هرگاه ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان سال اول و۱۲ نفر دیگر سال دوم باشند، مطلوب است احتمال‌آن‌که ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر ازسال دوم انتخاب شوند .

حل : در اینجا تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با $\binom{22}{8}$ و عـدهٔ عضوهای پیشامد مطلوب طبق اصل شمارش برابر $\binom{12}{4}\times\binom{10}{4}$ می‌باشد؛ درنتیجه احتمال‌خواسته شده برابر است با :

$$\frac{\binom{10}{4}\times\binom{12}{4}}{\binom{22}{8}}$$

پیشامد یقین ، پیشامد نشدنی

گفتیم‌که هرزیرمجموعه‌ای از فضای نمونهٔ S یك پیشامد است ؛ بنابراین S و ∅ نیز دو پیشامد می‌باشند ؛ S به نام پیشامد یقین خوانده می‌شود واحتمال آن برابر یك است :

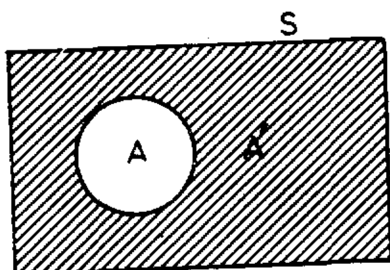
$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$$

$\varnothing$ را پیشامد نشدنی می‌خوانند و احتمال آن برابر است با :

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰$$

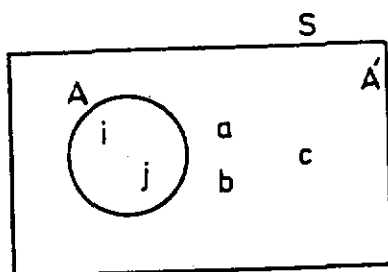
متمم پیشامد A

هرگاه A زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S باشد ، چون A مجموعه است متمم آن مجموعهٔ A' خواهد بود . در احتمالات اگر A پیشامد مفروضی باشد A' به مفهوم آن است که A واقع نخواهد شد .



مثال ـ هریك ازحروف a،b،c،i،j را روی یك کارت نوشته پس از مخلوط کردن آنها ، یك کارت را به طور قرعه برمی‌داریم ؛ مطلوب است تعیین : الف ـ احتمال آن‌که روی این کارت حرف نقطه دار باشد ب ـ احتمال‌آن‌که روی این کارت حرف نقطه دار نباشد .

حل : هرگاه S فضای نمونه‌ای و A پیشامد بیرون آمدن حرف نقطه‌دار باشد ، خواهیم داشت :



$S = \{ a ، b ، c ، i ، j \}$

$A = \{ i ، j \}$

الف ـ احتمال پیشامد A برابراست با :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۵}$$

ب ـ احتمال آن‌که A واقع نشود (A' واقع شود) برابر است با :

$A' = \{ a ، b ، c \}$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۳}{۵}$$

در این مثال داریم :

$$P(A) + P(A') = \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵} = ۱$$

این مطلب در حالت‌کلی نیز درست می‌باشد . یعنی هرگاه A و A' به ترتیب پیشامد

مفروض ومتمم آن باشد خواهیم داشت :

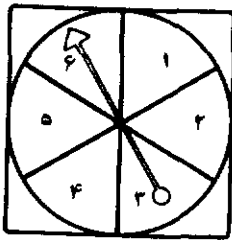
$$P(A)+P(A')=1$$

و یا :

$$P(A)=1-P(A')$$

تمرین

۱ـ در دستگاه زیر عقربه را به حرکت درمی‌آوریم؛ درصورتی‌که احتمال توقف عقربه درهرقسمت مساوی باشد ، مطلوب است محاسبهٔ احتمال‌آن‌که :

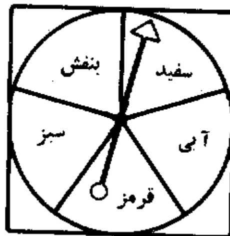


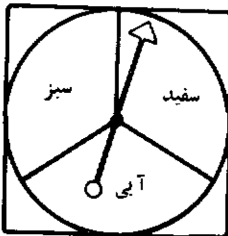
الف ـ عقربه درناحیه‌ای‌که باعدد ۴ مشخص شده‌است توقف‌کند .

ب ـ عقربه در قسمتهایی که با اعداد زوج مشخص شده‌اند توقف‌کند .

ج ـ عقربه درقسمتهایی‌که بااعداد فرد مشخص‌شده‌اند توقف‌کند .

۲ـ در دستگاههای زیر دو عقربه را باهم می‌چرخانیم ؛ در صورتی که در هردستگاه احتمال توقف عقربه درهرقسمت مساوی باشد مطلوب است:



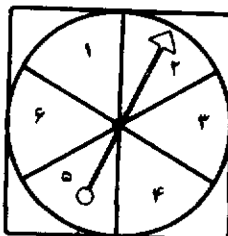


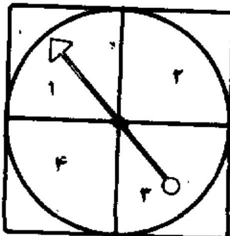
الف ـ احتمال آن که اقلا یك عقربه درقسمت‌آبی توقف‌کند.

ب ـ احتمال‌آن‌که فقط یك عقربه در قسمت سفید توقف‌کند .

ج ـ احتمال آن که هردو عقربه درقسمت سبز توقف‌کنند .

۳ـ در دستگاههای زیر دوعقربه راباهم می‌چرخانیم ، درصورتی‌که درهردستگاه احتمال توقف عقربه درهرقسمت مساوی باشد مطلوب است :





الف ـ احتمال آن‌که هردو عقربه در قسمتهایی که با اعداد اول مشخص شده‌اند توقف‌کنند .

ب ـ احتمال آن که هردو عقربه در قسمتهایی که با اعداد

زوج مشخص شده‌اند توقف کنند.

۴ـ یک سکهٔ دو ریالی سه بار متوالی به‌هوا انداخته می‌شود ؛ مطلوب است :
الف ـ احتمال آن‌که اقلا یک‌بارخط داشته باشیم . ب ـ احتمال آن‌که هرسه بارسکه خط بیاید . ج ـ احتمال آن‌که اقلا دوبار سکه خط بیاید .

۵ـ دو تاس باهم ریخته می‌شود ؛ مطلوب است :
الف ـ احتمال A ، هرگاه A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاس پس از نشستن ۷ باشد .

ب ـ احتمال B ، هرگاه B پیشامد آن باشد که هردو تاس باعدد زوج رو شوند .
ج ـ احتمال C ، هرگاه C پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاسها پس از نشستن کمتر از ۷ باشد .

۶ـ هریک از ترکیبات $\binom{5}{3}$ مجموعهٔ $\{a ، b ، c ، d ، e\}$ را روی یک کارت نوشته پس از مخلوط کردن کارتها یک کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم ؛ مطلوب است احتمال آن که حرف a یکی از حروف این کارت باشد .

۷ـ یک کیسه محتوی ۳ مهرهٔ قرمز ، یک مهرهٔ سیاه و دو مهرهٔ سفید است . یک مهره را به‌طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم ؛ مطلوب است: الف ـ احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد.
ب ـ این مهره را به‌کیسه برگردانده مهرهٔ دیگری بیرون می‌آوریم ؛ احتمال آن که این مهره سفید باشد. ج ـ مهرهٔ دوم را به‌کیسه برگردانده ۳ مهره را بیرون می‌آوریم؛ احتمال آن‌که هرسه مهره قرمز باشد .

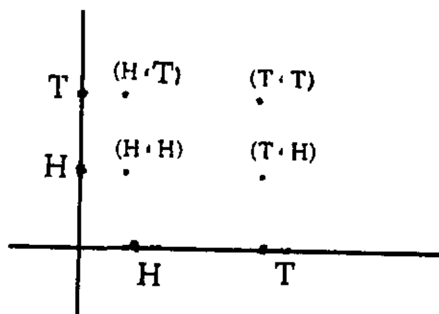
۸ـ یک عدد را به طور تصادفی از میان اولین ۱۰ عدد زوج مثبت انتخاب می‌کنیم ؛ احتمال آن‌که عدد انتخاب شده مضرب ۳ و ۴ نباشد چیست ؟

۹ـ یک کیسه محتوی ۱۵ مهرهٔ سیاه ، ۱۰ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است؛ یک مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم ؛ مطلوب است : الف ـ احتمال آن‌که این مهره آبی باشد . ب ـ احتمال آن‌که این مهره آبی نباشد . ج ـ این مهره را به‌کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم ؛ احتمال آن‌که یک مهره سیاه ویک مهره سفید باشد .

۱۰ ـ یک تاس ویک سکه باهم انداخته می‌شوند ، مطلوب است : الف ـ احتمال آن که تاس عدد زوج یا سکه شیر بیاید . ب ـ احتمال آن‌که تاس عدد زوج وسکه شیر بیاید .

قوانین احتمال

دو سکه باهم به هوا انداخته می‌شود ، مطلوب است:
الف ـ احتمال آن‌که هر دو شیر یا هر دو خط بیاید .



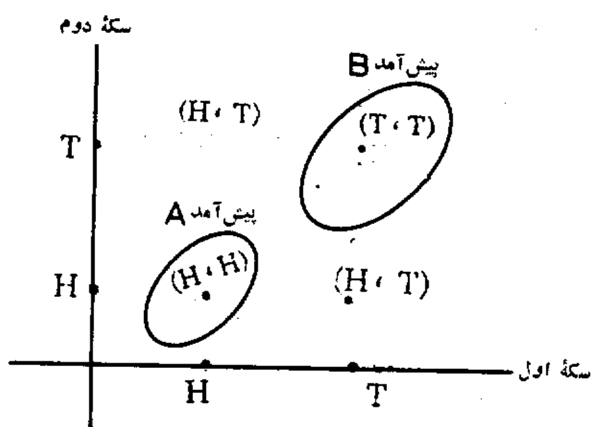
ب ـ احتمال آن که اقلاً یک شیر یا اقلاً یک خط بیاید .

همان طور که قبلاً دیدید ، فضای نمونه‌ای در این تجربه برابر است با :

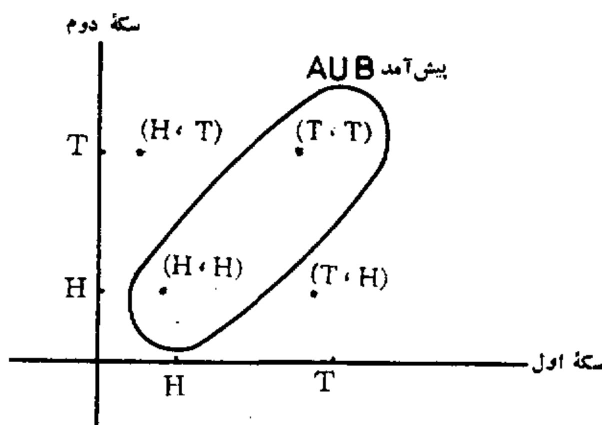
$$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

الف ـ هرگاه A پیشامد هردو سکه شیر و B پیشامدهردوسکه خط باشد ، خواهیم داشت :

$$A=\{(H,H)\},\ B=\{(T,T)\}$$



چون هرپیشامد مجموعه‌است، لذا کلمهٔ « یا » دراینجا مفهوم« یا »در مجموعه‌ها را داشته و پیشامد آن‌که هردو سکه شیر یا هر دو خط باشد ، برابر است با :



$$A\cup B=\{(H،H)\}\cup\{(T،T)\}$$
$$=\{(H،H)\ ،\ (T،T)\}$$

و احتمال آنها به ترتیب برابر است با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A\bigcup B)=\frac{n(A\bigcup B)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}$$

دراینجا دیده می‌شود که :

$$P(A\bigcup B)=\frac{۲}{۴}$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$$

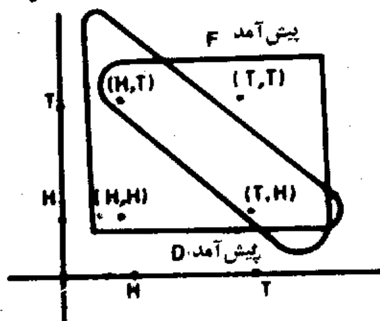
$$=P(A)+P(B)$$

به عبارت دیگر ، برای این تجربه داریم :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$$

آیا این تساوی همیشه درست است ؟ برای جواب به این سؤال به قسمت « ب » توجه کنید .

ب ـ در این تجربه ، پیشامدهای اقلاً یك شیر ، اقلاً یك خط و اقلاً یك شیر یا اقلاً یك خط به‌ترتیب برابر است با :



$$D=\{(H،H)،(H،T)،(T،H)\}$$

$$F=\{(H،T)،(T،H)،(T،T)\}$$

$$D\bigcup F=\{(H،H)،(H،T)،(T،H)،(T،T)\}$$

درنتیجه احتمال‌آنها برابر است با :

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

$$P(D\bigcup F)=\frac{n(D\bigcup F)}{n(S)}=\frac{۴}{۴}$$

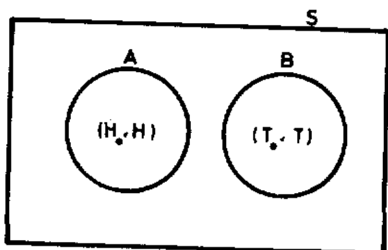
دراینجا دیده می‌شودکه :

$$\frac{۴}{۴}\neq\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}$$

$$P(D\bigcup F)\neq P(D)+P(F)$$

چرا درقسمت « الف » تساوی برقرار و در قسمت « ب » برقرار نیست ؟ جواب این است‌که در قسمت « الف » دوپیشامد A و B عضو مشترکی ندارند یعنی : $A\bigcap B=\varnothing$.

تعریف ـ دو پیشامد B و A که عضو مشترکی نداشته باشند (یعنی $A\cap B=\varnothing$) به نام دو پیشامد ناسازگار خوانده می‌شود .

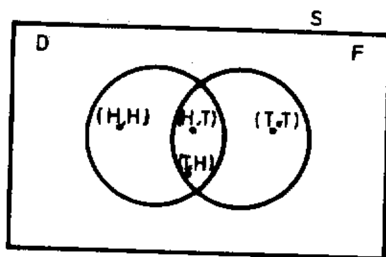


هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار باشند ، داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \quad (۱)$$

درقسمت « ب » دوپیشامد D و F عضو مشترك دارند :

$$D\cap F=\{(H,T),(T,H)\}\neq\varnothing$$



اگر دو پیشامد A و B را داشته باشیم احتمال پیشامد $A\cup B$ بوسیله رابطه زیر بدست می‌آید

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad (۲)$$

واضح است که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند $P(A\cap B)=0$ است زیرا $A\cap B$ یك پیشامد نشدنی است . دراینصورت رابطه (۲) به رابطه (۱) تبدیل می‌گردد .

تساویهای (۱) و (۲) را می‌توان با استفاده از تعریف احتمال ثابت کرد .

اگر $A\cap B\neq\varnothing$ ، طبق آنچه در مجموعه‌ها دیدید داریم :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

هرگاه طرفین این تساوی را بر $n(S)$ تقسیم‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

که طبق‌آنچه راجع به احتمال یك پیشامد گفته شد ، حاصل می‌شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر $A\cap B=\varnothing$ ، آن‌گاه $P(A\cap B)=0$ واز آنجا به دست می‌آید :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال ۱ ـ یك کیسه محتوی ۵ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ مشکی است؛ یك مهره را به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می‌آوریم ؛ احتمال آن که این مهره قرمز یا سفید باشد چیست ؟

حل : هرگاه مهره‌های قرمز ، سفید ومشکی‌را به ترتیب با g ، c و m نشان داده برای تمایز مهره‌های همرنگ از اندیس استفاده‌کنیم ، فضای نمونهٔ تجربه برابرخواهد شد با :

$$S = \{ g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 , c_1 , c_2 , c_3 , m_1 , m_2 , m_3 \}$$

همچنین اگر A پیشامد آن که مهرهٔ بیرون آمده قرمز و B پیشامد آن کـه مهره سفید باشد ، داریم :

$$A = \{ g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 \} ; \quad B = \{ c_1 , c_2 , c_3 \}$$

در اینجا $A \cap B = \varnothing$ یعنی A، و B ناسازگار هستند ، پس می‌نویسیم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{۵}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱} = \frac{۸}{۱۱}$$

مثال ۷ ـ عددی به طور تصادفی از فضای نمونه‌ای :

$$S = \{ ۱ , ۲ , ۳ , \ldots , ۹ \}$$

انتخاب می‌شود ، هرگاه احتمال عضوها مساوی باشند ، احتمال‌آن‌که عدد انتخاب شده‌کمتر از ۴ یا فرد باشد چیست ؟

حل : هرگاه پیشامدهای « عدد انتخاب شده‌کوچکتر از ۴ است » و « عدد انتخاب شده فرد است » را به ترتیب با A و B نمایش دهیم ، خواهیم داشت :

$$A = \{ ۱ , ۲ , ۳ \} , B = \{ ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ \}$$

در این صورت پیشامد مطلوب یعنی « عدد انتخاب شده کمتر از ۴ یا فرد باشد » برابر است با :

$$A \cup B = \{ ۱ , ۲ , ۳ \} \cup \{ ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ \}$$

$$= \{ ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ \}$$

$$A \cap B = \{ ۱ , ۲ , ۳ \} \cap \{ ۱ , ۳ , ۵ , ۹ \}$$

$$= \{ ۱ , ۳ \} \neq \varnothing$$

پس خواهیم داشت :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{۳}{۹} + \frac{۵}{۹} - \frac{۲}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

مستقل بودن دو پیشامد

مثال ۱ ـ یك سکه دوبار انداخته می‌شود ؛ احتمال این‌که سکه در هردوبار شیر بیاید چیست ؟

تجربهٔ دوبار انداختن یك سکه نظیر **تجربهٔ دوسکه باهم انداختن است ؛ لذا فضای نمونه در این تجربه برابر می‌شود با :**

$$S=\{(H،H)،(H،T)،(T،H)،(T،T)\}$$

هرگاه A و B به‌ترتیب پیشامدهای « شیرآمدن درپرتاب اول » و « شیرآمدن درپرتاب دوم » باشند ، داریم :

$$A=\{(H،H)،(H،T)\}؛B=\{(H،H)،(T،H)\}$$

در نتیجه ، پیشامد « سکه در پرتاب اول شیر » و « در پرتاب دوم نیزشیر » بیاید برابر است با :

$$A\cap B=\{(H،H)\}$$

و احتمال آن برابر می‌شود با :

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی احتمال شیرآمدن سکه در هرکدام از پرتابها برابر $\frac{۱}{۲}$ است ، پس می‌توان نوشت :

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$
$$=P(A)\times P(B)$$

به عبارت دیگر ، برای این مثال داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)$$

آیا این تساوی همیشه درست است ؟ برای پاسخ به مثال زیر توجه‌کنید :

مثال ۲ ـ دوتاس را با هم یکبار پرتاب می‌کنیم . هرگاه پیشامد A عبارت از ظاهرشدن عدد ۱ روی تاس اول وپیشامد B آمدن مجموع دو تاس برابر ۳ باشد داریم :

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶)\}$$

$$B=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$$

و $A\cap B=\{(۱,۲)\}$

باتوجه به‌اینکه فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضواست احتمال پیشامدهای بالا برابراست با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}\neq\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۱۸}$$

بنابراین : $P(A\cap B)\neq P(A)\,.\,P(B)$

چرا در مثال اول : $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)$ ولی در مثال دوم : $P(A\cap B)\neq P(A)\,.\,P(B)$ ؟

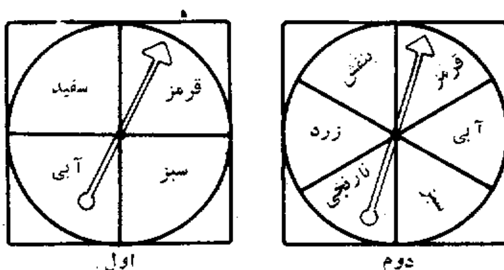
جواب این است‌که درمثال اول شیرآمدن سکهٔ دوم به‌هیچ وجه بستگی به‌شیرآمدن سکهٔ اول ندارد ؛ به عبارت دیگر ، پیشامد اول روی پیشامد دوم تاثیرنمی‌گذارد؛ چنین پیشامدهایی را مستقل می‌خوانند .

تعریف ـ دو پیشامد A و B مستقل خوانده می‌شود اگر و فقط اگر داشته باشیم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)$$

در غیر این صورت ، دو پیشامد A و B را غیر مستقل می‌نامند .

درمثال دوم پیشامدهای A و B مستقل نیستند. یعنی پیشامد اول روی پیشامد دوم تاثیر می‌گذارد . برای اینکه مفهوم دوپیشامد مستقل را بهتر درك کنید به دومثال زیر توجه کنید:

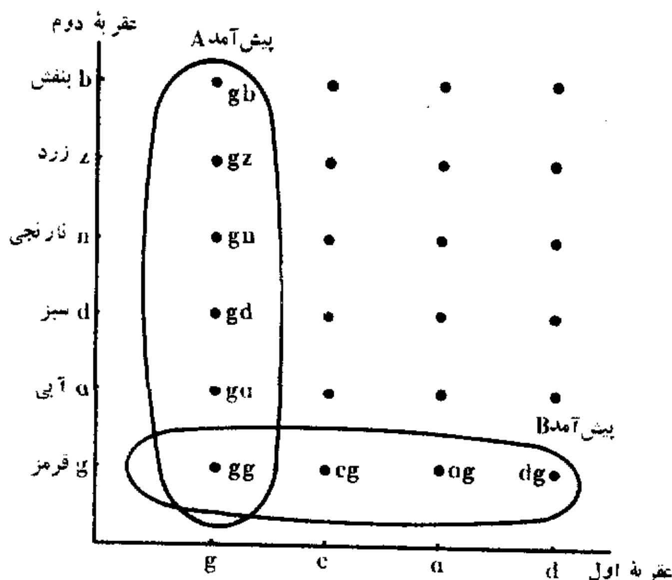


مثال ۳ ـ در دو دستگاه روبه‌رو، دو عقربه باهم به‌چرخش درمی‌آید ، مطلوب است احتمال آن‌که عقربهٔ‌اول وعقربهٔ‌دوم هردو درقسمت قرمز توقف‌کنند .

حل : پیشامدهای « توقف عقربهٔ اول در قسمت قرمز » ، « توقف عقربهٔ دوم در قسمت قرمز » را به ترتیب با A و B نمایش می‌دهیم . در زیر فضای نمونه‌ای و مجموعه‌های A و B نمایش داده شده است :

$A=\{\,gg\,،\,ga\,،\,gd\,،\,gn\,،\,gz\,،\,gb\,\}$

$B=\{\,gg\,،\,cg\,،\,ag\,،\,dg\,\}$



روشن است که A و B مستقل ازهم می‌باشند، به این معناکه توقف عقربهٔ اول درناحیهٔ قرمز تأثیری روی توقف عقربهٔ دوم در ناحیهٔ قرمز ندارد ؛ بنابراین داریم :

$$P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B)$$

$$= \frac{۶}{۲۴} \times \frac{۴}{۲۴} = \frac{۱}{۲۴}$$ (۲۴ عدهٔ عضوهای S است:)

از روی شکل نیز دیده می‌شودکه $A \cap B = \{ gg \}$ ، یعنی پیشامد $A \cap B$ دارای یك عضو بوده و احتمال آن برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است .

مثال ۲ ـ دو تاس باهم ریخته می‌شود ؛ هرگاه A و B به ترتیب پیشامدهای « آمدن اقلاً یك ۲ » و « آمدن مجموع دو تاس ۵ » باشند: نمودارمختصاتی فضای‌نمونه‌ای وپیشامدهای A و B را رسم‌کرده ، نشان دهیدکه A و B مستقل نیستند.

حل :درشکل صفحه‌بعد،نمودار مختصاتی فضای نمونه‌ای و پیشامدهای A و B نشان‌داده شده است. دراینجا فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو بوده پیشامدهای A و B برابرند با :

$$A = \{(۲،۱)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۲،۴)،(۲،۵)،(۲،۶)،(۱،۲)،(۳،۲)،(۴،۲)،(۵،۲)،(۶،۲)\}$$

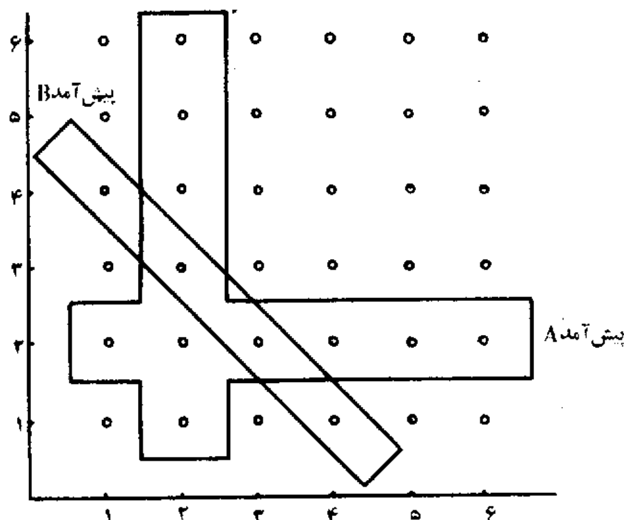
$$B = \{ (۱،۴) ، (۲،۳) ، (۳،۲) ، (۴،۱) \}$$

درنتیجه :

$$A \cap B = \{ (۲،۳) ، (۳،۲) \}$$

که احتمال‌آنها برابر می‌شود با :

$$P(A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)} = \frac{۱۱}{۳۶}$$



$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۲}{۳۶} = \frac{۱}{۱۸}$$

در اینجا دیده می‌شود که :

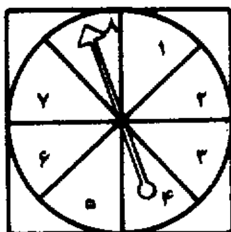
$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۸} \neq \frac{۱۱}{۳۶} \times \frac{۱}{۹}$$

یا :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \, . \, P(B)$$

لذا A و B مستقل نیستند .

تمرین



۱ـ در دستگاه رو به رو ، عقربه را به حرکت در می‌آوریم ، مطلوب است :

الف ـ احتمال آن‌که عقربه در قسمت ۴ یا ۶ متوقف شود (منظور از قسمت ۴ قسمتی است که با عدد ۴ مشخص شده است) .

ب ـ احتمال آن‌که عقربه در قسمتهایی‌که با عدد زوج یا باعدد اول مشخص شده‌اند توقف کند .

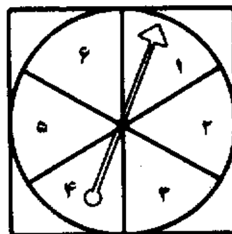
۲ـ حروف الفبای‌فارسی‌را به‌ترتیب روی ۳۲ کارت نوشته پس ازمخلوط‌کردن کارتها یك کارت را به طور قرعه برمی‌داریم؛ مطلوب است : الف ـ احتمال‌آن‌که روی کارت بیرون‌آمده حرف « الف » یا « ب » باشد . ب ـ احتمال‌آن که روی‌کارت بیرون آمده یکی از حروف

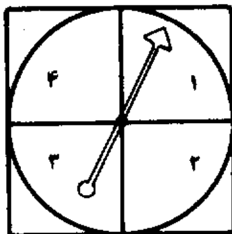
اسامی رضا یا حمید باشد . ج ـ احتمال آن‌که روی کارت بیرون آمده هیچ یك از حروف کلمهٔ « شکست » نباشد .

۳ـ دو تاس باهم ریخته می‌شوند ؛ مطلوب‌است : الف ـ احتمال‌آن‌که مجموع اعدادی که از دو تاس رو می‌شود ۵ یا ۶ باشد . ب ـ احتمال آن‌که مجموع اعدادی‌که از دو تاس رو می‌شود ۷ یا ۱۱ باشد . د ـ احتمال آن‌که مجموع اعدادی که از دو تاس می‌آید نه ۵ باشد و نه ۶ .

۴ـ یك‌کیسه محتوی ۷ مهرهٔ قرمز ، ۴ مهرهٔ سفید ، ۵ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سیاه است. یك مهره به طور تصادفی از داخل‌کیسه بیرون می‌آوریم ؛ مطلوب است: الف ـ احتمال‌آن‌که این مهره قرمز یاآبی باشد . ب ـ احتمال آن‌که این مهره نه قرمز باشد ونه‌آبی .

۵ ـ اعداد یك تا ۱۵ را روی ۱۵ کارت مختلف نوشته پس از مخلوط‌کردن‌کارتها ، سه کارت را به‌طور قرعه برمی‌داریم ؛ مطلوب است : الف ـ احتمال‌آن‌که عدد روی هریك ازاین سه‌کارت مضرب ۳ یا اول باشد . ب ـ احتمال آن‌که عدد روی هریك از سه‌کارت مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد .





۶ـ دردودستگاه‌روبه‌رو، عقربه‌ها را باهم به حرکت در می‌آوریم ؛ مطلوب است : الف ـ احتمال آن که عقربهٔ اول و عقربهٔ دوم در قسمت ۳ متوقف شود . ب ـ احتمال‌آن که عقربه‌های اول و دوم درقسمتهایی‌که بااعداد زوج مشخص شده‌اند متوقف شوند .

۷ـ دریك تجربهٔ باسکه : الف ـ یك سکه دو مرتبه انداخته می‌شود ؛ احتمال‌آن‌که سکه درهردومرتبه خط بیایدچیست ؟ ب ـ یك سکه سه مرتبه انداخته می‌شود ؛ احتمال‌آن‌که سکه در هرسه مرتبه خط بیاید چیست ؟ ج ـ یك سکه n مرتبه انداخته می‌شود؛ احتمال آن‌که سکه در هر n مرتبه خط بیاید چیست ؟

۸ـ یك صندوق محتوی ۱۰۰ عدد ساعت مچی است؛ چهار عدد از این ساعتها درحالی که هیچ نوع علائم ظاهری ندارند خراب می‌باشند ؛ شخصی ازاین صندوق ۴ ساعت را به‌طور تصادفی بیرون می‌آورد ؛ مطلوب است احتمال آن‌که هرچهار ساعت خراب باشند.

۹ـ ۳۲ کارت متشکل از ۴ رنگ به طور مساوی در دست است ؛ ۵کارت را ازمیان ۳۲ کارت‌به‌طورتصادفی بیرون می‌کشیم؛مطلوب‌است‌احتمال آن‌که هر ۵ کارت همرنگ‌باشند .

۱۰ـ دو سکه و یك تاس باهم ریخته می‌شوند ؛ مطلوب است احتمال آن‌که هردو سکه

شیر و تاس عدد ۵ بیاید .

۱۱ـ یک کیسه محتوی ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سبز و کیسهٔ دیگر شامل ۶ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز است؛ ازهرکیسه به طور تصادفی یک مهره بیرون می‌آوریم ؛ مطلوب است احتمال آن‌که هردو مهره همرنگ باشند .

۱۲- یک تاس سفید و یک تاس سبز ریخته می‌شود ؛ فرض‌کنید A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد تاسها که می‌آید ۷ و B پیشامد آن باشد که مجموع آنها ۵ و C پیشامد آن‌که تاس سبز ۴ بیاید: الف ـ آیا A و C مستقل ازهم هستند؟ ب ـ آیا B و C مستقل‌ازهم هستند ؟

آمار

آمار چیست ؟

مقدمه ـ چه تعداد از دانش‌آموزان ایران بادست چپ می‌نویسند ؟ شاید به نظر برسد که این سؤال صرفاً جنبهٔ کنجکاوی دارد . اما اگر کمی بیشتر توجه شود ، جنبه‌های دیگر آن‌نیز روشن می‌گردد . درآموزشگاه دانش‌آموزان چپ دست بامشکلات خاصی مواجه هستند . فرض کنید این دانش‌آموزان درکلاس درس از صندلیهای دسته‌دار (دستهٔ صندلیها در طرف راست فرض می‌شود) استفاده‌کنند و یا در امتحانات روی چنین صندلیهایی بنشینند ؛ در این صورت تختهٔ محل نوشتن مقابل دستی که آنها می‌نویسند قرار نمی‌گیرد ، و این وضع برای چنین دانش‌آموزانی ناراحت‌کننده است. مسئلهٔ دیگر برای این دانش‌آموزان مسئلهٔ نور است . برای کسانی‌که بادست راست می‌نویسند نور باید از طرف چپ تابیده شود درصورتی‌که وضع برای دانش‌آموزان چپ دست برعکس است . لذا ، رئیس آموزشگاه یا مسئولان مربوط باید در موقع خرید این نوع صندلیها بتوانند حدس بزنند که چند درصد ازدانش‌آموزان ممکن است چپ‌دست باشند . به چه طریق می‌توان درصد دانش‌آموزان چپ دست شهرتهران را تعیین کرد؟

در صنعت و تجارت نیز با سؤالاتی از قبیل « شمارهٔ‌کفش مردان بیشتر بین چه نمره‌هایی قرار دارد ؟ » مواجه می‌شویم . دربرخورد اول این سؤال نیز قدری عجیب به‌نظر می‌آید . ولی ازنقطه نظر تجارت ، یك‌کارخانهٔ کفش سازی باید بداند چه شماره‌ای بیشتر مصرف دارد تاآن شماره را بیشتر تولیدکند . همچنین باید به درصد تقریبی افرادی‌که پاهای بسیار بزرگ یا بسیارکوچك دارند توجه‌کند تابتواند درصد تولیدکفشهای بسیار بزرگ و بسیارکوچك را کنترل نماید . به چه طریق می‌توان شمارهٔ پای مردان را تعیین‌کرد ؟ آیا امکان دارد که پای همهٔ مردان را اندازه‌گرفت ؟

از نقطهٔ نظر مدیریت ، مدیر یك‌کارخانه (مثلاً کارخانه پودر رختشویی) باید بداند که چند درصد از خانواده‌ها محصول‌کارخانهٔ اورا مصرف می‌کنند . اگر یك واحد تولیدی به طور مداوم ازنظر مردم درمورد محصول خود اطلاع داشته باشد مسلماً آن واحد تولیدی‌بهتر می‌تواند در بازار فعال باقی بماند . زیرا به محض آن‌که مدیر کارخانه احساس کندکه مردم از محصول کارخانهٔ او (مثلاً پودر رختشویی) خسته شده‌اند [illegible] کارخانه به‌وضع نامطلوبی بیرون‌آید او می‌تواند باتعویض نام محصول [illegible]

جدیدی همراه با تبلیغات مجدداً برای محصول کارخانهٔ خود مشتری به‌دست‌آورد. به چه طریق می‌توان از نظر مردم یا خانواده‌ها درمورد محصول یک کارخانه اطلاع به‌دست‌آورد؟ آیاعملی است که از همهٔ مردم در این مورد سؤال به‌عمل‌آید؟

علم آمار می‌تواند به سؤالات بالا پاسخ دهد. بطورکلی می‌توان گفت که آمارعلمی است که با جمع‌آوری، سازمان‌بندی وتجزیه وتحلیل اطلاعات سروکار دارد.

اطلاعات آماری و سازمان‌بندی آنها

پس از برگزاری یک امتحان نمرات ریاضی ۲۱ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به صورت‌زیر تعیین شده است:

۱۹، ۱۰، ۱۸، ۱۵، ۱۲، ۱۴، ۱۹، ۱۸، ۱۸، ۱۶، ۷، ۱۲، ۱۲، ۱۶، ۶، ۹، ۱۲

۱۶، ۱۲، ۱۵، ۸

این دسته از اعدادکه دراینجا با انجام یک آزمایش به دست‌آمده است به نام داده‌های آماری (= اطلاعات آماری = ارقام آماری) خوانده می‌شود. روشن است که این نمره‌ها به‌صورتی که‌نوشته شده‌اند مطالب زیادی راجع به‌وضع دانش‌آموزان دراین درس‌نشان‌نمی‌دهند. برای بحث بیشتر این عددها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم:

۱۶، ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۵، ۱۴، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶

۱۹، ۱۹، ۱۸، ۱۸، ۱۸

حال از روی این داده‌های مرتب شده یا سازمان داده شده مطالب زیر رافوراً می‌توان بیان‌کرد:

- کمترین نمره ۶ و بیشترین نمره ۱۹ است.
- اختلاف‌کمترین وبیشترین نمره یعنی «۶—۱۹» برابر ۱۳ است.
- نمرهٔ ۱۴ درمیان نمرات واقع شده است، یعنی ۱۰ نفر از ۱۴ بیشتر و۱۰ نفراز ۱۴ کمتر گرفته‌اند.
- نمرهٔ ۱۲ دراین نمرات بیشترازهمه تکرارشده است.

اعمالی که ما دراینجا انجام دادیم یعنی:

- جمع‌آوری اطلاعات
- سازمان‌بندی ونمایش اطلاعات
- توصیف این اطلاعات

مقدمات علم‌آماربوده به‌نام آمار توصیفی خوانده می‌شود. دراین بخش به ترتیب‌این مطالب را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

جمع‌آوری اطلاعات ـ داده‌های آماری یا به طریق آزمایش وتجربه یا به‌طریق مراجعه به‌آرای عمومی به دست می‌آید . دراین صورت باید عمل تجربه ویاتنظیم وتوزیع‌پرسش‌نامه‌ها باکمال دقت انجام گیرد . گاهی اوقات از تجارب دیگران وداده‌های‌آماری که‌آنها قبلاً به‌دست آورده‌اند استفاده می‌کنیم . دراین صورت باید در صحت ودرستی آنها اطمینان داشته‌باشیم .

سازمان دادن کیفی (چونی) داده‌ها ـ دیدیدکه چگونه نمره‌های ریاضی به دست‌آمده از یك‌کلاس یعنی داده‌های آماری را مرتب‌کردیم تابه‌کمك آنها بهتربتوانیم راجـع به قوهٔ ریاضی آن‌کلاس بحث‌کنیم . غالب اوقات برای‌آن‌که تصور فوری و روشنی ازاطلاعات آماری به دست‌آوریم ، آنها را باکمك نمودار نمایش می‌دهیم .

مثال ـ مدیر یك مدرسه می‌خواهد برای بوفهٔ دبیرستان دستور تهیهٔ بستنی بدهد . برای این‌که بستنی از یك نوع زیاد واز نوع دیگرکم نیاید ، قبلاً بین دانش‌آموزان اوراق زیر را که به نام پرسش‌نامه خوانده می‌شود توزیع می‌کند :

لطفاً درمقابل‌بستنی‌مورد علاقهٔ‌خودعلامت X بزنید .

۱ـ بستنی پاستوریزه

۲ـ بستنی شکلاتی لیوانی

۳ـ بستنی خامه‌دار

۴ـ بستنی میوه

۵ـ بستنی چوبی

پس‌از جمع‌آوری پرسش‌نامه‌ها و خواندن نظریات اطلاعات زیر به دست آمده است :

۱ـ بستنی پاستوریزهٔ لیوانی	۶۰
۲ـ بستنی شکلاتی لیوانی	۸۰
۳ـ بستنی خامه‌دار	۱۴۰
۴ـ بستنی میوه	۱۲۰
۵ـ بستنی چوبی	۷۰

نموداری به صورت زیر این اطلاعات را به طور روشنی نشان می‌دهد :



در صفحات بعد قوانین دقیق رسم این نمودار راکه به‌نام نمودار ستونی خوانده می‌شود، توضیح خواهیم داد .

نمودار دایره‌ای - این نمودار ازیك طرف برای نشان دادن رابطهٔ قسمتها بایکدیگر و از طرف دیگر رابطهٔ قسمتها با همهٔ اطلاعات آماری به‌کار برده می‌شود . برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا جدولی تشکیل می‌دهیم که دارای دوخاصیت زیر باشد :

الف - مفروضات را به طور روشن نشان دهد .

ب - نسبت یا درصد هرقسمت را باکل اطلاعات مشخص سازد .

پس از تشکیل جدول نمودارآن را به‌طریق تقسیم یك دایره به‌قطاعهایی متناسب‌باکسرها ویا درصدها رسم می‌کنیم .

مثال - کارمندی پس از دریافت حقوق ماهانه آن را به‌ترتیب زیر به‌مصرف می‌رساند: اجاره : $\frac{۱}{۳}$حقوق ؛ غذا : $\frac{۱}{۴}$ حقوق ؛ لباس : $\frac{۱}{۸}$حقوق ؛ متفرقه : $\frac{۱}{۶}$ حقوق؛ پس‌انداز: $\frac{۱}{۸}$حقوق . این اطلاعات را با استفاده از نمودار دایره‌ای نشان دهید .

حل : ابتدا باید توجه‌کرد که مجموع کسرها برابر یك باشد :

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۸+۶+۳+۴+۳}{۲۴}=۱$$

حال بااستفاده از خواص نسبتهاوآنچه راجع به‌زوایای مرکزی خوانده‌اید، وباکمك‌نقاله یك دایره را به‌قسمی به قطاعهایی تقسیم می‌کنیم‌که هرقطاع نمایش یکی‌ازکسرهای فوق باشد. در زیر زوایای مرکزی متناظر باکسرهای فوق محاسبه شده است :

اجاره :
$$\frac{x_۱}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow ۳x_۱=۳۶۰^\circ\Longrightarrow x_۱=۱۲۰^\circ$$

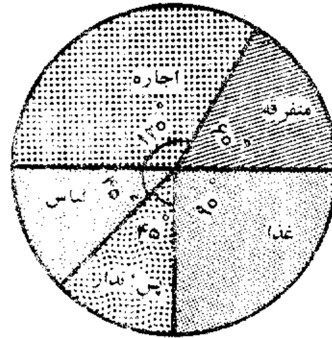
غذا :
$$\frac{x_۲}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۴}\Longrightarrow ۴x_۲=۳۶۰^\circ\Longrightarrow x_۲=۹۰^\circ$$

متفرقه :
$$\frac{x_۳}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۶}\Longrightarrow ۶x_۳=۳۶۰^\circ\Longrightarrow x_۳=۶۰^\circ$$

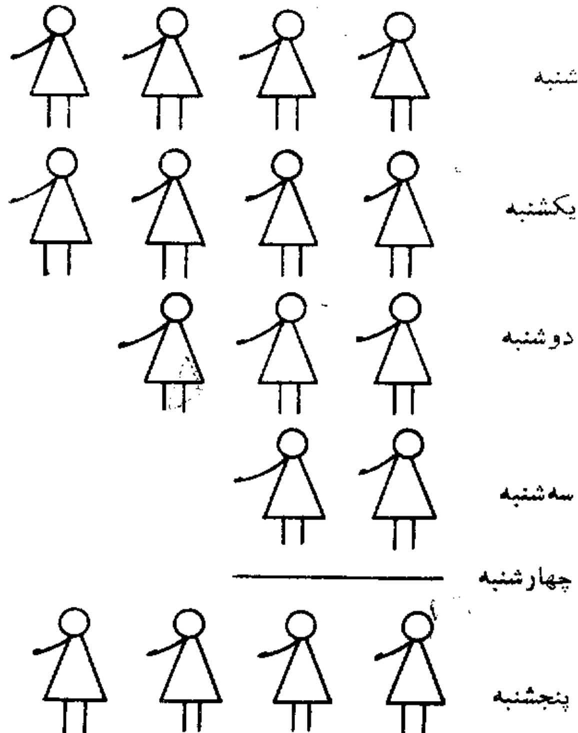
لباس یا پس‌انداز :
$$\frac{x_۴}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۸}\Longrightarrow ۸x_۴=۳۶۰^\circ\Longrightarrow x_۴=۴۵^\circ$$

جدول و نمودار دایره‌ای به صورت زیر خواهد بود :

کسرها	درجات متناظر
$\frac{۱}{۳}$	۱۲۰°
$\frac{۱}{۴}$	۹۰°
$\frac{۱}{۶}$	۶۰°
$\frac{۱}{۸}$	۴۵°
$\frac{۱}{۸}$	۴۵°

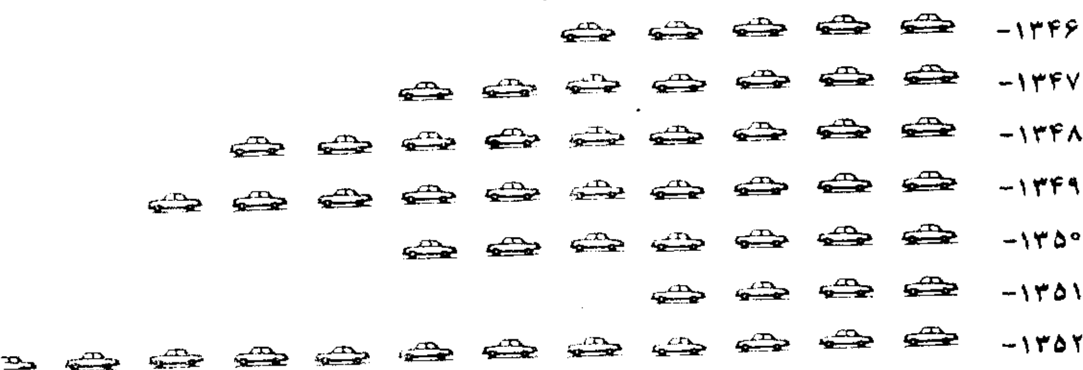


نمودار تصویری ـ طریق دیگر برای نمایش ارقام آماری استفاده از تصویر خود شیء است ، بدین ترتیب که تصویر شیء را عیناً یا به عنوان نمایندهٔ تعدادی از اشیا نمایش دهیم . در زیر تعداد غایبین کلاس یك مدرسه در روزهای هفتهٔ اول آذرماه نمایش داده شده است . هر تصویر نمایندهٔ یك دانش‌آموز است .



درزیر محصولات یك كارخانهٔ اتومبیل سازی را در چند سال متوالی نشان داده شده‌است.

هرتصویر اتومبیل نمایندهٔ ۱۰،۰۰۰ اتومبیل است :



تمرین

۱ــ در اندازه‌گیری قد اعضای تیم فوتبال یك دبیرستان اعداد زیر برحسب سانتیمتر به دست آمده است :

۱۵۶ ، ۱۶۴ ، ۱۵۵ ، ۱۴۹ ، ۱۵۷ ، ۱۶۰ ، ۱۵۵ ، ۱۴۹ ، ۱۵۱ ، ۱۵۵ ، ۱۶۵ ، ۱۶۲

۱۶۴ ، ۱۶۲ ، ۱۵۵

الف ــ طبق آنچه راجع به نمرهٔ ریاضی دانش‌آموزان یك كلاس دیدید ، این داده‌ها را سازمان بدهید .

ب ــ عدد میانی این داده‌ها را مشخص سازید .

ج ــ چه قدی از دانش‌آموزان بیشتر تكرار شده است .

د ــ اختلاف قد ، بلندترین و كوتاهترین بازیكنان این تیم را تعیین‌كنید .

۲ــ دریك امتحان قوه كه از ۶۰ نفر از دانش‌آموزان به عمل آمده نتیجهٔ زیر حاصل شده است :

بسیار خوب : ۸ نفر ؛ خوب : ۱۲ نفر ؛ متوسط خوب : ۲۴ نفر ؛ متوسط : ۱۲ نفر ؛ ضعیف : ۴ نفر . این داده‌ها را با استفاده از نمودار میله‌ای نشان دهید .

۳ــ كارمندی حقوق ماهانهٔ خود را به ترتیب زیر خرج می‌كند :

اجاره : ۳۵٪ ؛ غذا : ۳۵٪ ؛ لباس : ۱۵٪ ؛ متفرقه : ۱۰٪ ؛ پس‌انداز : ۵٪ . نمودار دایره‌ای این داده‌ها را رسم‌كنید .

۴ــ ۶ نفر از نامزدهای انتخاب انجمن شهر یك شهرستان به ترتیب زیر درصد از آرا

را به دست آورده‌اند :

رضا : ۳۰٪ ؛ فرزاد : ۲۰٪ ؛ حسین : ۱۵٪ : فرهاد : ۱۰٪ ؛ عبداله : ۱۲٪ ؛ فرید : ۱۳٪ . نمودار دایره‌ای این داده‌ها را رسم کنید .

۵ـ مأمور اتاق دفتر یك دبیرستان در یك روز تعداد دانش آموزانی را که در ساعتهای مختلف روز به دفتر مراجعه می‌کنند به صورت زیر گزارش داده است :

ساعات	۸ - ۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷
تعداد دانش‌آموزان	۶	۱۲	۱۴	۱۴	۱۳	۱۰	۶

نمودار ستونی این داده‌ها را رسم کنید .

۶ـ یك افسر پلیس تعداد ماشینهایی را که در ساعتهای مختلف یك روز در یکی از خیابانهای تهران تخلف کرده‌اند به‌صورت زیر یادداشت کرده است :

ساعات	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶
تعداد ماشینها	۶	۷	۱۲	۱۰	۱۰	۹	۷

نمودار ستونی این داده‌ها را رسم کنید .

سازمان دادن کمّی (چندی) اطلاعات

اطلاعات آماری که با مراجعه به آرای عمومی یا از تجربه یا ازطریق دیگر به دست می‌آید ، مجموعه‌ای از اعداد نامرتب هستندکه قبل از استفادهٔ علمی از آنها لازم است مرتب و خلاصه شوند . همان طورکه درشروع بخش دیدید ، اولین قدم برای استخراج مطالب لازم از این اطلاعات مرتب‌کردن‌آنها به طور صعودی است . یك روش مفیدتر عبارت است از :

خلاصه‌کردن اطلاعات وتشکیل‌جدولی‌به نام جدول فراوانی یا توزیع (=پخش) داده‌ها. بدین ترتیب که مجموعهٔ داده‌ها را به تعدادی رده (= طبقه) تقسیم‌کرده ، سپس عضوهای هررده را شمرده تعیین‌کنیم که درهررده چند عضو وجود دارد .

باکمك این جدول‌که جزئیات‌آن با مثال در زیر توضیح داده شده است، می‌توان بعضی‌از ویژگیهای داده‌های‌آماری را فوری وبه‌آسانی تشخیص داد .

مثال ـ دریك تجربهٔ آماری‌که شامل اندازه‌گیری بوده مشاهدات زیر برحسب سانتیمتر به دست‌آمده است : **(اعداد تا کمتر از یك سانتیمتر گرد شده‌اند)**

۱۸ ، ۲۷ ، ۱۵ ، ۲۵ ، ۱۷ ، ۲۵ ، ۲۲ ، ۲۲ ، ۲۷ ، ۲۶ ، ۳۰ ، ۱۷

۲۳ ، ۱۳ ، ۲۷ ، ۲۳ ، ۲۱ ، ۲۴ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۱۱ ، ۱۸ ، ۱۴

جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم کنید .

حل : ۱- ابتدا این داده‌ها را رده‌بندی می‌کنیم . رده‌بندی داده‌ها تا حدود زیادی ختیاری است و تعداد آنها برحسب زیادی و کمی داده‌های آماری تغییر می‌کند ، به عبارت دیگر ،هرچه داده‌های آماری زیادتر باشد ، تعداد رده‌ها زیادتر خواهدبود ؛ هرچه‌قدر تعداد رده‌ها کم باشد محاسبات سبکتر شده ولی کیفیت نتایج کاهش مییابد واگر تعداد رده‌ها زیاد باشد محاسبات سنگین و دقت نتایج افزایش پیدا می‌کند و برای تعدیل معمولاً تعداد رده‌ها را بین ۵ تا ۲۰ انتخاب می‌کنند ؛ در این مثال ما تعداد رده‌ها را ۵ می‌گیریم .

۲- پس از تعیین تعداد رده‌ها فاصله‌های آنها یا عرض هررده را تعیین می‌کنیم . در مثال فوق مشاهده می‌شود که کمترین عدد ۱۱ و بزرگترین آنها ۳۰ است لذا مجموع عرضهای رده‌ها باید فاصلهٔ (۱۱ — ۳۰) یعنی ۱۹ را دربرگیرد ۱۹ را دامنه تغییرات می‌گویند و با R نشان می‌دهند ، چون ۵ رده انتخاب کرده‌ایم عرض هر رده (یافاصله هر رده) برابر است با

$$\text{عرض هر رده} = \frac{R+۱}{۵} = \frac{۱۹+۱}{۵} = ۴$$

(باید توجه داشت که اعداد بالا با کمتر از یك گرد شده‌اند. لذا درصورت‌کسر R+۱ منظور شده است در صورتیکه اعداد کمتراز ۱۰ یا ۱۰۰ گرد شده باشند بایستی به‌جای عدد ۱ درصورت کسر به‌ترتیب اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ قرار داد .)

۳- حدود رده‌ها و کرانه رده‌ها .

رده‌ها را به‌ترتیب زیر تعیین می‌نماییم .

۳۰ - ۲۷ و ۲۶ - ۲۳ و ۲۲ - ۱۹ و ۱۸ - ۱۵ و ۱۴ - ۱۱

اکنون عضوهای هر رده را شمرده و درجدول زیر قرار می‌دهیم . تعداد شمارش‌های هر رده را فراوانی مطلق آن رده می‌گویند :

فراوانی مطلق رده‌ها	شمارش	رده‌ها
۳	///	۱۱-۱۴
۵	/////	۱۵-۱۸
۵	/////	۱۹-۲۲
۶	//////	۲۳-۲۶
۴	////	۲۷-۳۰
۲۳	۲۳	جمع

در رده اول اندازه‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ منظور شده‌است که ۱۱ را حدپائین و ۱۴ را حد بالای آن گویند و در رده دوم اندازه‌های ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ به حساب آمده است که ۱۵ را حد پائین و ۱۸ را حد بالای این رده می‌گویند ، همچنین حد پائین وبالای رده پنجم به ترتیب ۲۷ و ۳۰ می‌باشد .

برای تعیین کرانه پائین و کرانه بالای هر رده به‌طریقه زیر عمل می‌کنیم .

$$۱۴/۵ = \frac{۱۴ + ۱۵}{۲} = \frac{\text{حد پائین رده دوم} + \text{حد بالای رده اول}}{۲} = \text{کرانه بالای رده اول}$$

$$۱۸/۵ = \frac{۱۸ + ۱۹}{۲} = \frac{\text{حد پائین رده سوم} + \text{حد بالای رده دوم}}{۲} = \text{کرانه بالای رده دوم}$$

باید توجه داشت که کرانه بالای رده اول با کرانه پائین رده دوم مساویست ونیزکرانه بالای رده دوم با کرانه پائین رده سوم یکی‌است ، به این ترتیب کرانه پائین رده دوم ۱۴/۵ و کرانه بالای‌آن ۱۸/۵ می‌باشد . باتوجه به مطالب فوق کرانه پائین و بالای هررده ازجدول بالا را تعیین کرده و در جدول زیر قرار می‌دهیم .

فراوانی‌مطلق رده‌ها	کرانه رده‌ها	حدود رده‌ها
۳	۱۰/۵ — ۱۴/۵	۱۱ — ۱۴
۵	۱۴/۵ — ۱۸/۵	۱۵ — ۱۸
۵	۱۸/۵ — ۲۲/۵	۱۹ — ۲۲
۶	۲۲/۵ — ۲۶/۵	۲۳ — ۲۶
۴	۲۶/۵ — ۳۰/۵	۲۷ — ۳۰
۲۳	جمع	

کرانه پائین و بالای هر رده را حدود واقعی آن رده می‌گویند .

چون کرانهٔ بالای هر رده باکرانه پائین رده بعدی مساوی است ، مثلاً کرانه بالای رده اول باکرانه پائین رده دوم هر دو ۱۴/۵ می‌باشد ، باید روشن کنیم که ۱۴/۵ درکدام‌یك از رده‌ها منظور می‌شود ، قرار براین است که مثلاً در رده اول یعنی رده ۱۴/۵ - ۱۰/۵ اعدادی‌که از ۱۰/۵ بزرگتر یامساوی با آن می‌باشد وکوچکتر از ۱۴/۵ هستند منظور شود و ازرده دوم یعنی رده ۱۸/۵ - ۱۴/۵ اعدادی‌که از ۱۴/۵ بزرگتر یا مساوی باآن‌می‌باشد و کوچکتر از عدد ۱۸/۵ می‌باشند به حساب آیند و بهمین ترتیب در رده پنجم یعنی رده ۳۰/۵ - ۲۶/۵ عددهائی‌که از عدد ۲۶/۵ بزرگتر و یا مساوی‌آن بوده وکوچکتراز ۳۰/۵

باشندمنظور گردند ، به عبارت دیگر مثلاً در رده اول عدد ۱۴/۵ منظور نمی‌شود و در رده دوم به حساب می‌آید وهمچنین عدد ۲۶/۵ در رده چهارم به حساب نمی‌آید و در رده پنجم منظور می‌شود .

نمودار ستونی جدول فراوانی

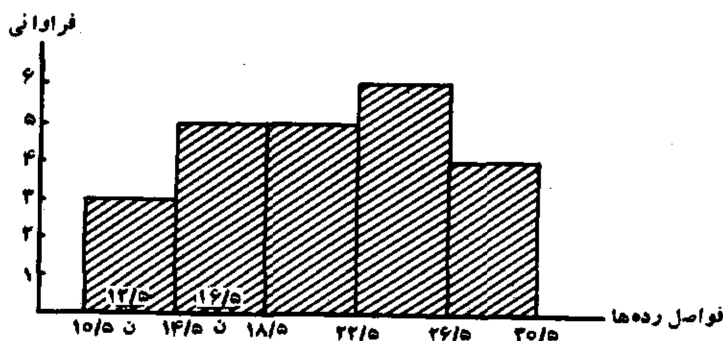
اگرچه جدول توزیع فراوانی در ارائهٔ بعضی از ویژگیهای داده‌های آماری مفید است ولی گاهی اوقات نمایش تصویری همان داده‌ها ، خواص مورد نظر را روشن‌تر و سریع‌ترنشان می‌دهد . برای رسم نمودار ستونی جدول فراوانی داده‌ها آماری به‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

الف ـ در صفحهٔ مختصات و روی محور افقی با انتخاب واحد مناسب و توجه به عرض رده‌ها[1] فواصل رده‌ها را متوالیاً نقل می‌کنیم .

ب ـ روی محور عمودی فراوانی هررده را نقل می‌کنیم .

ج ـ روی فاصلهٔ هررده (عرض هررده) مستطیلی‌که ارتفاع‌آن متناسب با فراوانی‌آن رده است بنا می‌کنیم .

در زیر نمودار ستونی جدول فراوانی فوق رسم شده است .



نمایندهٔ رده ـ گاهی اوقات هررده بایك نماینده (عدد یانقطه) مشخص می‌شود . این نماینده نقطهٔ وسط یا اندازهٔ وسط هرفاصله انتخاب شده درنمودارآن را با حرف « ن » مشخص می‌سازیم . اندازهٔ نمایندهٔ یك رده برابر است با نصف مجموع کرانه‌های بالا و پایین آن رده با

۱ـ باید توجه داشت‌که عرض رده‌ها ممکن‌است مساوی‌گرفته نشوند ولی مساوی گرفتن آنهاکار را ساده‌تر می‌کند .

نصف مجموع مرزهای آن رده . در مثال بالا نمایندهٔ ردهٔ اول برابر است با :

$$\frac{۱۱+۱۴}{۲} = \frac{۱۰/۵+۱۴/۵}{۲} = ۱۲/۵$$

فراوانی نسبی وفراوانی درصد

فراوانی نسبی هررده برابر است با فراوانی آن رده تقسیم برمجموع فراوانیهای همهٔ رده‌ها .
از ضرب فراوانی نسبی درصد ، فراوانی در صد به دست می‌آید .

درزیر نمایندهٔ رده ، فراوانی نسبی و فراوانی‌درصد مربوط به‌مثال مورد بحث نشان داده شده است :

حدود رده‌ها	حدود واقعی یا کرانه رده‌ها	نمایندهٔ رده	فراوانی‌هررده	فراوانی نسبی	فراوانی درصد
۱۱——۱۴	۱۰/۵——۱۴/۵	۱۲/۵	۳	۰/۱۳	۱۳
۱۵——۱۸	۱۴/۵——۱۸/۵	۱۶/۵	۵	۰/۲۱۷	۲۱/۷
۱۹——۲۲	۱۸/۵——۲۲/۵	۲۰/۵	۵	۰/۲۱۷	۲۱/۷
۲۳——۲۶	۲۲/۵——۲۶/۵	۲۴/۵	۶	۰/۲۶	۲۶
۲۷——۳۰	۲۶/۵——۳۰/۵	۲۸/۵	۴	۰/۱۷۴	۱۷/۴
			۲۳		

نمودار چندبر (= خط شکسته‌ای)

هرگاه خواسته باشیم چند دسته داده‌ها را باهم مقایسه کنیم ، از نوعی نمودار که به نمودار خط شکسته‌ای یا نمودار چندبر معروف است استفاده می‌کنیم. برای رسم نمودارچندبر یك دسته داده‌ها به یکی از دوطریق زیر عمل می‌کنیم :

۱ـ جدول فراوانی داده‌ها را تنظیم کرده نمودار ستونی جدول مربوط را رسم می‌کنیم ؛ سپس وسطهای ضلعهای بالایی مستطیلهای این نمودار ستونی راباخطهای مستقیم متوالیاً بهم وصل می‌نماییم (شکل ـ الف) .

۲ـ جدول فراوانی داده‌ها را همراه بانمایندهٔ رده‌ها تنظیم‌کرده ، سپس نماینده‌های رده‌ها را روی محور x ها وفراوانی رده‌ها را روی محور y ها نقل می‌کنیم؛ آن‌گاه نقاط متناظر بااین

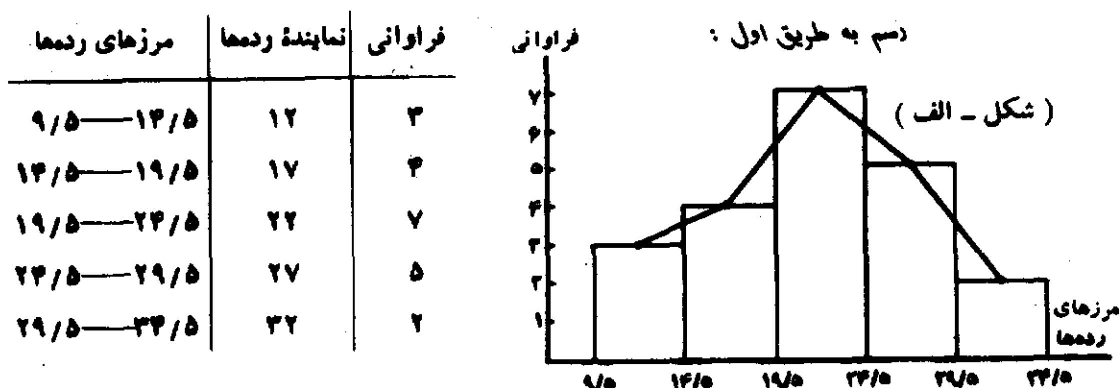
زوجهارا درصفحهٔ دومحور مشخص‌کرده آنها را متوالیاً باخطهای مستقیم بهم وصل می‌کنیم (شکل ـ ب) .

مثال ـ نمودار خط شکسته‌ای دادههای زیررا رسم‌کنید :

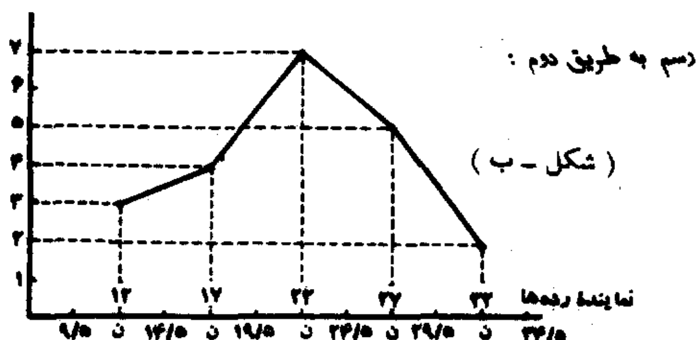
۲۷ ، ۱۳ ، ۲۳ ، ۱۷ ، ۳۴ ، ۲۶ ، ۱۲ ، ۲۷ ، ۲۲ ، ۲۲ ، ۲۵ ، ۱۷ ، ۳۳ ، ۱۵ ، ۲۷

۱۰ ، ۲۱ ، ۱۹ ، ۲۴ ، ۲۱ ، ۲۳

حل : جدول توزیع فراوانی دادههای بالا را که شامل نمایندهٔ ردهها نیز می‌باشد تنظیم می‌کنیم :



فراوانی	نمایندهٔ ردهها	مرزهای ردهها
۳	۱۲	۹/۵ــــ۱۴/۵
۴	۱۷	۱۴/۵ــــ۱۹/۵
۷	۲۲	۱۹/۵ــــ۲۴/۵
۵	۲۷	۲۴/۵ــــ۲۹/۵
۲	۳۲	۲۹/۵ــــ۳۴/۵



فراوانی تجمعی

فراوانیهایی‌که در دروس قبل توضیح داده شد ، برای سازمان دادن ، خلاصه کردن و نمایش دادههای آماری کمکهای با ارزشی می‌کنند ، ولی بعضی اوقات نیاز به دانستنیهای مربوط به تعداد مشاهداتی داریم‌که اندازه‌های‌آنها‌کمتر از اندازهٔ معین دراین دادهها می‌باشد. دانستنیهای مزبور از طریق یك نوع فراوانی‌که به‌نام فراوانی تجمعی خوانده می‌شود به‌دست می‌آید . درزیر جزئیات این فراوانی باکمك مثال توضیح داده شده است .

مثال ـ در زیر سن دانش‌آموزان یک‌کلاس شبانه نوشته شده است ؛ جدول تجمع فراوانی این اطلاعات را تنظیم‌کنید .

(کسر سال حذف شده است بدین‌معنی که مثلاً ۲۴ سال و یک روز تا ۲۴سال و ۳۶۵ روز ۲۴ ساله منظور شده است .)

۱۳ ، ۲۳ ، ۱۷ ، ۳۴ ، ۲۶ ، ۱۲ ، ۲۷ ، ۲۲ ، ۲۲ ، ۲۵ ، ۱۷ ، ۳۳ ، ۱۵ ، ۲۷
۱۰ ، ۲۱ ، ۱۹ ، ۲۴ ، ۲۱ ، ۲۳ ، ۲۷

حل : ابتدا جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم می‌کنیم :

رده‌ها	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴
فراوانی رده‌ها	۳	۴	۷	۵	۲

در این جدول مشاهده می‌شود که :

ـ هیچ‌کدام از مشاهدات از ۱۰ کمتر نیست .
ـ ۳ مشاهدهٔ (۳+۰) کمتر از ۱۵ وجود دارد .
ـ ۷ مشاهدهٔ (۴+۳+۰) کمتر از ۲۰ وجود دارد.
ـ ۱۴ مشاهدهٔ (۷+۴+۳+۰) کمتر از ۲۵ موجود است .
ـ ۱۹ مشاهدهٔ (۵+۷+۴+۳+۰) کمتر از ۳۰ موجود است.
ـ ۲۱ مشاهدهٔ (۲+۵+۷+۴+۳+۰) کمتر از ۳۵ می‌باشد .

اعداد ۰ ، ۳ ، ۷ ، ۱۴ ، ۱۹ و ۲۱ به ترتیب فراوانیهای تجمعی‌کمتر از ۱۰ ، کمتر از ۱۵ ، کمتر از ۲۰ ، کمتر از ۲۵ ، کمتراز ۳۰ و کمتر از ۳۵ ، اطلاعـات فوق خوانده می‌شود . دراینجا می‌بینید که :

برای به دست‌آوردن فراوانی تجمعی مشاهدات کمتر از کرانهٔ پایین یک رده ، در یک دسته داده‌های آماری ، کافی است فراوانیهای تمام رده‌های ماقبل‌آن رده را باهم جمع‌کنیم .

در زیر ، جدول فراوانی تجمعی داده‌های بالا باتوجه به جدول بالا تنظیم شده است:

داده‌ها	فراوانی تجمعی
کمتر از ۱۰	۰
کمتر از ۱۵	۳=۳+۰
کمتر از ۲۰	۷=۴+۳+۰
کمتر از ۲۵	۱۴=۷+۴+۳+۰
کمتر از ۳۰	۱۹=۵+۷+۴+۳+۰
کمتر از ۳۵	۲۱=۲+۵+۷+۴+۳+۰

رسم نمودار فراوانی تجمعی

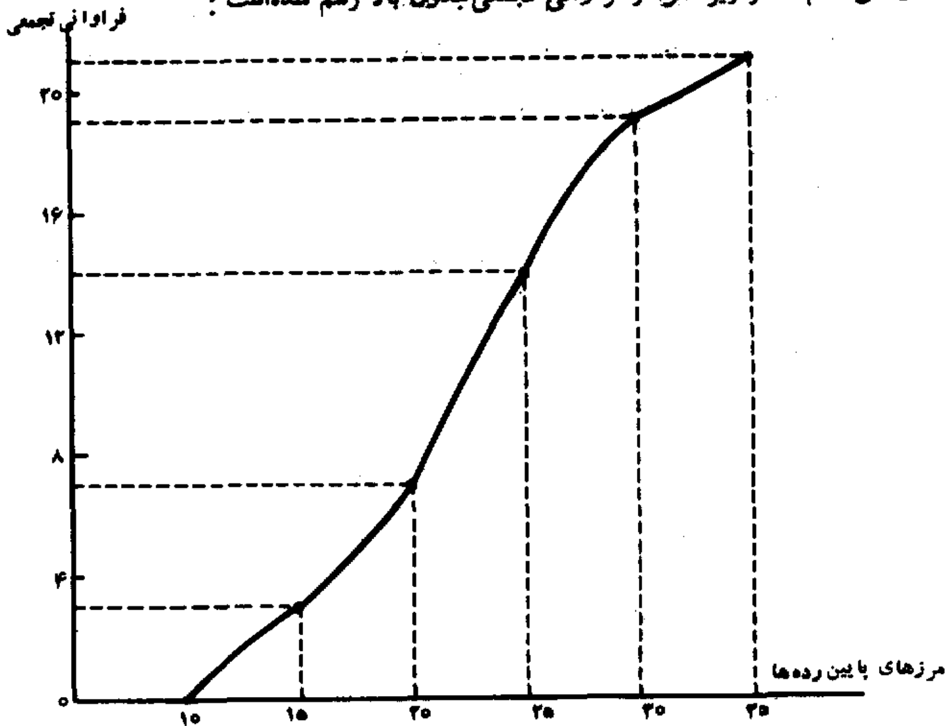
برای رسم نمودارفراوانی تجمعی یك دسته داده‌های آماری به ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

ـ جدول فراوانی تجمعی داده‌ها را تنظیم می‌کنیم .

ـ مرزهای پایین رده‌ها را روی محور افقی نقل می‌کنیم .

ـ تجمع فراوانی‌کمتر از هررده را روی محورقائم نقل می‌کنیم .

ـ نقاط متناظر بااین زوجها را در صفحهٔ دومحور به دست آورده آنها را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم . در زیر نمودار فراوانی تجمعی جدول بالا رسم شده‌است :



تمرین

۱ـ برای داده‌های :

۷۰	۱۲۵	۱۹۳	۱۸۴	۱۸۲	۱۸۱
۱۲۳	۷۷	۱۴۹	۱۶۱	۱۷۲	۱۶۸
۹۷	۱۱۵	۱۳۶	۱۳۵	۱۱۴	۱۱۵
۱۱۷	۱۸۴	۱۰۸	۱۰۴	۱۰۹	۱۱۲
۹۲	۱۳۲	۱۱۵	۱۲۸	۶۴	۸۰
۱۶۱	۱۱۸	۱۳۱	۷۵	۱۲۰	۱۲۳
۱۴۸	۵۶	۷۱	۱۰۶	۱۰۰	۸۴
۱۳۵	۱۱۲	۱۱۴	۸۳	۱۲۸	۱۱۱

الف ـ جدول فراوانی را تشکیل دهید. ب ـ نمودار ستونی ونمودار چندبر را رسم کنید.

۲ـ برای دادههای :

۲۷۸۶	۳۲۱۷	۲۶۱۸	۲۸۴۵
۲۸۳۲	۲۵۲۴	۲۴۲۷	۲۸۳۸
۲۳۱۲	۲۶۹۷	۲۲۲۰	۳۰۱۰
۳۲۱۸	۲۸۵۵	۳۱۳۷	۲۵۸۱
۲۴۲۶	۳۳۴۶	۲۹۷۸	۲۷۱۴

الف ـ جدول فراوانی را تشکیل دهید. ب ـ نمودار ستونی ونمودار چندبر را رسم کنید.

۳ـ در امتحانات ورودی دانشگاه نمرهٔ هردانش آموز از ۱۰۰۰ کم میشود . در زیر نمرهٔ ۶۰ نفر ازداوطلبان که به طور تصادفی انتخاب شده ، داده شده است . جدول فراوانی و نمودار ستونی این دادهها را رسم کنید :

۵۸۲	۵۱۳	۶۰۰	۵۷۶	۶۵۳	۶۹۱
۵۲۵	۵۹۶	۷۰۲	۶۲۰	۶۱۱	۵۲۸
۷۲۶	۶۲۱	۶۹۸	۷۴۰	۶۰۶	۶۵۴
۷۴۵	۷۶۷	۷۸۰	۷۲۹	۶۳۰	۴۷۷
۵۶۷	۷۴۰	۵۸۵	۵۴۰	۶۲۷	۶۴۳
۶۰۹	۳۲۷	۴۸۳	۵۷۶	۶۰۰	
۶۴۷	۳۴۱	۵۲۵	۶۹۳	۶۹۵	
۷۳۲	۶۹۸	۵۷۶	۷۲۰	۳۸۵	
۵۸۸	۸۹۷	۵۲۷	۶۲۴	۷۷۱	
۶۷۲	۶۰۳	۶۸۱	۵۱۹	۴۸۵	
۶۴۸	۶۳۹	۷۸۹	۶۹۶	۶۶۷	

۴ـ در زیر ، جدول فراوانی نمرههای ریاضی ۳۰ نفر از دانشآموزان داده شده است .

حدود دادهها	۱—۳	۴—۶	۷—۹	۱۰—۱۲	۱۳—۱۵	۱۶—۱۸	۱۹—۲۰
فراوانی	۱	۳	۵	۷	۸	۴	۲

الف ـ کرانه ردهها و نمایندهٔ آنها را تعیین کنید .

ب ـ نمودار ستونی وچندبر جدولفوق را رسم کنید .

۵ـ یک مدرسهٔ عالی دارای ۱۴۲۶ دانشجوست؛ درزیر جدول فراوانی مربوط به سن این دانشجویان داده شده است : (کسر سال حذف شده است .)

حدود ردهها	۱۷—۲۱	۲۲—۲۶	۲۷—۳۱	۳۲—۳۶	۳۷—۴۱
فراوانی	۵۶۲	۴۵۰	۳۵۰	۵۸	۶

الف ـ کرانه ردەها ونمایندهٔ آنها را تعیین کنید .

ب ـ نمودار ستونی وخط شکسته‌ای جدول فوق را رسم کنید .

۶ـ مطلوب است رسم نمودار ستونی وچند بری جدول زیر :

حدود رده‌ها	۲۵—۴۹	۵۰—۷۴	۷۵—۹۹	۱۰۰—۱۲۴	۱۲۵—۱۴۹
فراوانی	۱۵	۲۵	۳۰	۲۰	۱۰

۷ـ جدول فراوانی تجمعی ونمودار داده‌های‌آماری زیر را رسم کنید:

۲۱ ، ۱۹ ، ۲۷ ، ۲۵ ، ۲۳ ، ۲۲ ، ۲۱ ، ۲۱ ، ۱۹ ، ۱۸ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۵

۴۰ ، ۳۹ ، ۳۶ ، ۳۵ ، ۳۴ ، ۳۳ ، ۳۲ ، ۳۱ ، ۳۰ ، ۲۸

۸ـ مطلوب است رسم نمودار فراوانی تجمعی جدول زیر :

حدود رده‌ها	۱—۳	۴—۶	۷—۹	۱۰—۱۲	۱۳—۱۵	۱۶—۱۸	۱۹—۲۱
فراوانی	۱	۳	۵	۷	۸	۴	۲

۹ـ برای داده‌های :

۷	۲۹	۳۸	۴۴	۴۸	۵۳	۵۸
۱۲	۳۱	۳۹	۴۴	۴۸	۵۴	۵۹
۱۵	۳۲	۳۹	۴۵	۴۸	۵۴	۵۹
۱۸	۳۲	۴۰	۴۵	۴۹	۵۴	۶۰
۲۰	۳۴	۴۱	۴۵	۴۹	۵۴	۶۳
۲۱	۳۶	۴۱	۴۶	۵۰	۵۵	۶۴
۲۳	۳۷	۴۲	۴۷	۵۱	۵۶	۶۶
۲۶	۳۷	۴۳	۴۷	۵۳	۵۷	۶۷

مطلوب است : الف ـ تنظیم جدول فراوانی . ب ـ فراوانی نسبی وفراوانی درصد هر رده . ج ـ رسم نمودار ستونی ، چندبر و فراوانی تجمعی .

توصیف اطلاعات

مطالبی که تا کنون از آنها بحث شد جنبهٔ تجسمی داشته قادر به توصیف همهٔ جنبه‌های اطلاعات آماری نیستند ؛ از طرفی روشهای آماری در غالب اوقات برای بیان مشخصات دقیق‌تر ارقام احتیاج به توصیفهای عددی دارند ؛ اکنون بااستفاده از اعمال حسابی روی ارقام آماری بعضی از این توصیفهای عددی را توضیح می‌دهیم .

فرض کنید نمره‌های ریاضی ۲۱ نفر دانش‌آموز یك کلاس به صورت زیر مرتب شده باشد :

۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۱۶، ۱۶، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۱۹

در اینجا می‌خواهیم ببینیم چه نمره‌ای باید انتخاب کرد که بتواند به عنوان نمایندهٔ این نمرات ارائه شود . باید توجه داشت که درآمار مسئلهٔ تفسیر که تقریباً یك مسئلهٔ قضاوت است نیز مطرح می‌باشد ، بدین معنی که در انتخاب این نماینده یك نفر ممکن است تمام نمرات را جمع کرده حاصل آنها را برتعدادشان تقسیم کند:

$$\frac{۶+۷+۸+\ ...\ +۱۹}{۲۱} \# ۱۳/۵$$

نفر دیگر ممکن است نمرات را به‌طریق صعودی یا نزولی مرتب کرده (که در اینجا مرتب شده است) عدد وسطی را به عنوان نماینده انتخاب کند (در این مثال ۱۴) . بالاخره نفر سوم ممکن است نمره‌ای را که تعداد بیشتری از دانش‌آموزان گرفته‌اند (در این مثال ۱۲) به عنوان نمایندهٔ نمرات انتخاب کند . هرکدام از انتخابهای فوق ممکن است از یك نقطه نظر نمایندهٔ ارقام داده‌شده باشند . این نماینده‌ها که به‌ترتیب میانگین حسابی ، میانه ، نما خوانده می‌شوند،نمونه‌هایی از اندازه‌های مرکزی هستند که آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

میانگین حسابی

شما مسلماً تاکنون بدون آن‌که خودتان توجه داشته باشید از میانگین حسابی استفاده کرده‌اید . مثلا وقتی نمرات دروس مختلف در یك پرسش اعلام می‌شود، شما فوری این‌نمرات را زیرهم نوشته‌جمع می‌کنید سپس مجموع‌حاصل را برتعداد دروس تقسیم‌می‌کنیدتا به اصطلاح معدل نمرات خود را به دست آورید . این معدل نمرات همان میانگین حسابی درآمار است .

مثال دیگر : شخصی با اتومبیل خود راه بین شیراز ـ تهران راکه ۹۰۰ کیلومتر است در ۱۲ ساعت طی می‌کند ؛ اگر او بخواهد بفهمد که اتومبیل او به‌طور متوسط درهرساعت چند کیلومتر راه طی‌کرده است ، کافی است که مسافت پیموده شده را برساعاتی‌که در راه بوده‌است تقسیم کند : $۷۵ = \frac{۹۰۰}{۱۲}$ ، سرعت به دست‌آمده میانگین حسابی سرعتها می‌باشد .

تعریف ـ میانگین حسابی یا به طور ساده میانگین یك دسته داده‌های آماری‌که شامل n اندازه باشد ، برابر است با مجموع اندازه‌ها تقسیم برتعدادآنها یعنی n .

به عبارت دیگر ، میانگین حسابی n اندازهٔ x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . ، x_n که با $\bar{x}$ نمایش داده می‌شود ؛ برابر است با :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ ...\ + x_n}{n}$$

مثال ۱ ـ میانگین حسابی اندازه‌های ۸ ، ۶ ، ۱۴ ، ۱۲ و ۱۰ را تعیین کنید .

$$\bar{x}=\frac{۸+۶+۱۴+۱۲+۱۰}{۵}=۱۰$$

مثال ۲ ـ مطلوب است تعیین میانگین حسابی اندازه‌های داده شده :

۴۰ ، ۴۰ ، ۴۰ ، ۴۰ ، ۳۰ ، ۳۰ ، ۳۰ ، ۲۵ ، ۲۵ ، ۲۵ ، ۲۵ ، ۷۰

طبق تعریف فوق میانگین این داده‌ها برابر است با :

$$\bar{x}=\frac{۴۰+۴۰+۴۰+۴۰+۳۰+۳۰+۳۰+۲۵+۲۵+۲۵+۲۵+۷۰}{۱۲}$$

$$=\frac{(۴۰+۴۰+۴۰+۴۰)+(۳۰+۳۰+۳۰)+(۲۵+۲۵+۲۵+۲۵)+۷۰}{۴\quad+\quad۳\quad+\quad۴\quad+۱}$$

$$=\frac{۴\times۴۰+۳\times۳۰+۴\times۲۵+۱\times۷۰}{۴+۳+۴+۱}\qquad(۱)$$

$$=\frac{۱۶۰+۹۰+۱۰۰+۷۰}{۱۲}=\frac{۴۲۰}{۱۲}=۳۵$$

همان طورکه قبلا دیدید، تعداد دفعاتی‌که یك اندازهٔ‌آماری تکرار می‌شود به‌نام فراوانی آن اندازه خوانده شده معمولاً آن را با f نمایش می‌دهند. درمثال فوق ، فراوانیهای داده‌های ۴۰ ، ۳۰ ، ۲۵ و ۷۰ به ترتیب برابرند با ۴ ، ۳ ، ۴ و ۱ . هرگاه داده‌ها را به ترتیب با x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 و فراوانی‌آنها را به ترتیب با f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4 نمایش دهیم . باتوجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4}{f_1+f_2+f_3+f_4}$$

هرگاه به‌جای ۴ اندازهٔ‌داده شده ، k اندازه x_1 ، x_2 ، . . . ، x_k که فراوانیهای‌آنها به ترتیب f_1 ، f_2 ، . . . ، f_k می‌باشند ، داشته باشیم دراین صورت میانگین حسابی‌آنها برابر خواهد بود با :

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_kx_k}{f_1+f_2+\ldots+f_k}$$

در اینجا $\bar{x}$ را میانگین وزنی ارقام آماری می‌نامند .

مثال ـ مطلوب است محاسبهٔ میانگین وزنی جدول زیر :

x	۴	۱۴	۲۴	۳۴
f	۲	۸	۲۰	۱۰

حل : طبق دستور بالا داریم :

$$\bar{x}=\frac{۲\times۴+۸\times۱۴+۲۰\times۲۴+۱۰\times۳۴}{۲+۸+۲۰+۱۰}$$

$$=\frac{۸+۱۱۲+۴۸۰+۳۴۰}{۴۰}=\frac{۹۴۰}{۴۰}=۲۳/۵$$

برای تعیین میانگین وزنی دادههای آماریکه به صورت جدول فراوانی داده شده است؛ دردستوربالا بهجای x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . ، f_k به ترتیب نمایندههایردهها و بهجای فراوانیها، فراوانیهای ردهمارا قرار میدهیم .

میانه

میانهٔ یك دسته دادههای آماریکه با حرف m نمایش داده میشود ، عددی استکهنصف دادهها از آن بزرگتر ونصف دادهها از آن کوچکتر باشند . به عبارت دیگر :

الف ـ هرگاه n داده داشته باشیم و n عدد فرد باشد و این دادهها را به طور صعودی یا نزولی مرتب کنیم ، بنا بهتعریف میانه برابر دادهٔ وسطی است . مثلاً دادههای آماری زیر :

۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۳ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۲۰

عدد ۸ که در میان واقع شده (۵ داده در چپآن و ۵ داده در راست آن قرار دارد) میانه میباشد .

ب ـ هرگاه n داده داشته باشیم و n عدد زوج باشد در این صورت هیچ دادهای دروسط نیست ، باز هرگاه این دادهها را به طور صعودییانزولی مرتب کنیم ، بنا به تعریف ، میانه برابراست با میانگین دو عددیکه در وسط قرارگرفتهاند . مثلاً در دادههای زیر :

۲ ، ۵ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۱ ، ۲۱ ، ۲۳ ، ۲۳ ، ۲۵

در اینجا اندازههای ۱۰ و ۱۵ در وسط قرار گرفتهاند (۵ داده در سمت چپ آنها و ۵ داده درسمت راستآنها قرار دارد) ، لذا داریم : $m = \frac{۱۰ + ۱۵}{۲} = ۱۲/۵$

هرگاه دادههای آماری به صورت جدول فراوانی داده شده باشد ، محاسبهٔ میانه باروش خاصی انجام میگیردکه ما دراین سطح از ذکرآن خودداری میکنیم .

نما

برای یك دسته دادههای آماری ، نماکه با حرف M نمایش داده میشود دادهای است که بیش از سایر دادهها تکرار شده باشد . مثلاً در دادههای آماری زیر :

۱ ، ۲ ، ۴ ، ۴ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸

رقم ۴ بیش از همه تکرار شده است ; لذا در اینجا رقم ۴ نما میباشد . هرگاه دادهها به صورت جدول فراوانی داده شده باشد، دراین صورت ردهایکه بزرگترین فراوانی را دارد بهنام ردهٔ نما خوانده میشود . باید توجه داشتکه یك دسته دادههای آماری ممکناست نما نداشته و یا چند نما داشته باشند

مقیاسهای پراکندگی

از انجام محاسبات عددی برروی دادههای آماری اندازههایی به دست می‌آیدکـه به نام اندازههای توصیفی خوانده می‌شود ، بخشی ازآمارکه ازاین اندازهها بحث می کند آمارتوصیفی خوانده شده است . اندازههای مرکزی میانگین ، میانه ، . . . و نما یکی از مباحث آمـار توصیفی است. اگرچه هرکدام ازاندازههای مرکزی بهنوبهٔ خود مفید وحاوی مطالبی درتوزیع اطلاعات هستند ولی هیچ‌کدام از آنها مطالبی راجع به تغییرات دادههای آماری دراختیـار ما قرار نمی‌دهند . مثلاً میانگین سه عـدد ۳۰ ، ۴۰ ، ۵۰ برابر ۴۰ می‌باشد و میانگین اعـداد ۱۰ ، ۴۰ و ۷۰ نیز برابر ۴۰ است ؛ در حالی‌که به وضوح دیده می‌شود کـه تغییرات دادهها در حالت دوم به مراتب بیشتر از حالت اول است . چون در اندازههای مرکزی بحثی در بارهٔ این تغییرات نمی‌شود؛ لذا برای بررسی این تغییرات قسمتی ازیکی دیگرازبحثهای‌آمار توصیفی را که به‌نام مقیاسهای پراکندگی خوانده می‌شود مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

دامنه

تفاضل بین بزرگترین وکوچکترین دادههای آماری به نام دامنه خوانده می‌شود . مثلاً دامنهٔ دادههای :

۶ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۲۱ ، ۲۵ ، ۳۲ ، ۴۳

برابر است با تفاضل دو عدد ۴۳ و ۶ یعنی ۳۷ . اگرچه محاسبهٔ دامنه خیلی آسان است وکم وبیش به عنوان اندازهٔ تغییرات در آمار به‌کار برده می‌شود ، ولی به‌دلایل زیر استفاده ازآن درمطالعهٔ تغییرات یك دسته دادههای آماری‌کافی نیست :

۱ـ درمحاسبهٔ دامنه فقط دواندازه به‌کار برده می‌شود واز سایر اندازهها که قسمت بیشتر دادهها را تشکیل می‌دهند صرف‌نظر می‌شود .

۲ـ به تدریج‌که تعداد دادهها زیـاد می‌شود ، ممکن است دامنه به سوی عـدد بزرگتری میل‌کند ، لذا این اندازه برای مقایسهٔ دو دسته دادهها کـه تعداد مشاهدات آنها یکـی نیست مناسب نمی‌باشد .

۳ـ درتغییرات ، دامنه یك عدد ثابت نیست ، بدین معناکه اگر دونمونهٔ مختلف از یك دسته دادههای آماری را مورد مطالعه قرار دهیـم ، دامنهٔ تغییرات از یك دسته به دستهٔ دیگر تغییر می کند .

انحراف میانگین

مثال ـ مطلوب است محاسبهٔ انحراف میانگین داده‌های آماری زیر :

۸ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۲۱ ، ۲۲ ، ۲۳

برای محاسبهٔ انحراف میانگین داده‌های بالا به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ـ میانگین حسابی این داده‌ها را به دست می‌آوریم :

$$\bar{x}=\frac{۸+۹+۱۲+۱۴+۱۵+۱۷+۱۹+۲۱+۲۲+۲۳}{۱۰}=۱۶$$

۲ـ این میانگین حسابی را به‌ترتیب ازهرکدام از داده‌های بالاکم می‌کنیم، عدد حاصل به نام انحراف از میانگین یا به طور ساده انحراف آن داده خوانده می‌شود . در جدول زیر انحرافهای داده‌های بالا نشان داده شده است :

داده‌ها	۸	۹	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۲	۲۳
تفاضل $\bar{x}$ از داده‌ها	۸ − ۱۶	۹ − ۱۶	۱۲ − ۱۶	۱۴ − ۱۶	۱۵ − ۱۶	۱۷ − ۱۶	۱۹ − ۱۶	۲۱ − ۱۶	۲۲ − ۱۶	۲۳ − ۱۶
انحرافهای داده‌ها	−۸	−۷	−۴	−۲	−۱	+۱	۳	۵	۶	۷

عدد ۸− انحراف دادهٔ ۸، عدد ۷− انحراف دادهٔ ۹ ، عدد ۴− انحراف دادهٔ ۱۲، ... وغیره می‌باشد .

۳ـ میانگین قدرمطلقهای انحرافهای فوق را که به‌نام انحراف میانگین خوانده می‌شود به دست می‌آوریم :

$$\text{انحراف میانگین}=\frac{|-۸|+|-۷|+|-۴|+|-۲|+|-۱|+|+۱|+|۳|+|۵|+|۶|+|۷|}{۱۰}$$

$$=\frac{۸+۷+۴+۲+۱+۱+۳+۵+۶+۷}{۱۰}=\frac{۴۴}{۱۰}=۴/۴$$

باتوجه به مثال بالاگوییم : تفاضل بین هرکدام از داده‌های‌آماری ومیانگین حسابی‌آنها به نام انحراف از میانگین آن داده یا به طور ساده انحراف‌آن داده خوانده می‌شود. به عبارت دیگر ، هرگاه n دادهٔ x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n که میانگین حسابی‌آنها $\bar{x}$ است داشته باشیم ، به هرکدام از اندازه‌های زیر انحراف ازمیانگین یا به‌طور ساده انحراف آن داده می‌گویند :

$x_1-\bar{x}$ ، $x_2-\bar{x}$ ، . . . $x_n-\bar{x}$

تعریف ـ میانگین قدر مطلق انحرافها عددی است مخالف صفر که به‌نام انحراف میانگین داده‌های آماری خوانده می‌شود . به عبارت دیگر اگر d انحراف میانگین باشد داریم :

$$d=\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

انحراف معیار (انحراف استاندارد)

مهمترین مقیاس برای اندازه‌گیری پراکندگی ، انحراف معیار است . از این جهت برای مطالعه در تغییرات داده‌های آماری بیشتر از انحراف معیار استفاده می‌شود .

مثال ـ مطلوب است محاسبهٔ انحراف معیار داده‌های آماری زیر :

۳ ، ۴ ، ۲ ، ۵ ، ۳ ، ۸ ، ۶ ، ۷ ، ۵

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ـ میانگین این داده‌ها را به دست می‌آوریم :

$$\frac{۳+۴+۲+۵+۳+۸+۶+۷+۵}{۹}=\frac{۴۳}{۹}\# ۵$$

۲ـ در اینجا به‌جای قدر مطلقهای انحراف ، مربعات آنها را درنظر می‌گیریم . درمربع کردن انحرافهاعلامت منفی ازبین رفته درنتیجه مربع انحرافها همیشه اعداد مثبت خواهندبود:

$$(۳-۵)^۲ ، (۴-۵)^۲ ، (۲-۵)^۲ ، \ldots ، (۵-۵)^۲$$

بعضی اوقات ، قسمت ۲ را با استفاده ازجدول زیرمحاسبه می‌کنند :

داده‌های‌آماری	۳	۴	۲	۵	۳	۸	۶	۷	۵
انحرافها	۲−	۱−	۳−	۰	۲−	۳	۱	۲	۰
مربع انحرافها	۴	۱	۹	۰	۴	۹	۱	۴	۰

۳ـ مجموع مربعات انحرافها را حساب می‌کنیم :

$$۴+۱+۹+۰+۴+۹+۱+۴+۰=۳۲$$

۴ـ مجموع مربعات انحرافهارا برتعدادکل داده‌ها تقسیم کرده‌آن را با $s^۲$ نمایش‌می‌دهیم:

$$s^۲=\frac{۳۲}{۹}$$

۵ـ ریشهٔ دوم مثبت $s^۲$ همان انحراف معیار است :

$$s=\sqrt{\frac{۳۲}{۹}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

در زیر ، این مطالب به عنوان دستورالعمل محاسبهٔ انحراف معیار خلاصه شده است :

۱ـ میانگین دادههای آماری را به دست میآوریم :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

۲ـ مجموع مربعات انحرافها که به طور ساده مجموع مربعات خوانده میشود حساب میکنیم :

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

۳ـ مجموع مربعات را برتعدادکل دادههای آماری یعنی n تقسیم میکنیم ؛ عدد حاصل را معمولاً با s^2 نمایش داده آن را پراش میخوانیم :

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۴ـ قدر مطلق جذر این عبارت راکه به نام انحراف معیار (انحراف استاندارد) خوانده میشود ، به دست میآوریم :

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

شاخصها

شاخصها تغییرات دادههای آماری راکه بیشتر جنبهٔ اقتصادی یا اجتماعی دارند ، نسبت به زمان نشان میدهند ؛ به عبارت دیگر ، شاخصها تصور روشنی از افزایش هزینهٔ زندگی ، ازدیادجمعیت، ازدیاد محصول ، . . . را درسالهای مختلف نسبت بهیك سال معینکه سالپایه نامیده میشود ، نشان میدهند .

مثال ـ درجدول زیر بهای یككیلونان در ۴ سال متوالینوشته شده است. مطلوب است شاخص بهای نان نسبت به سال ۱۳۴۹ :

سالها	۱۳۴۹	۱۳۵۰	۱۳۵۱	۱۳۵۲
قیمت ۱ کیلوگرم نان برحسب ریال	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳

بهای یككیلو نان را در هرسال بر بهای یك کیلونان درسال ۱۳۴۹ تقسیم نموده ، خارج قسمت را در صد ضرب میکنیم ، اعداد حاصل شاخص بهای نان را در هرسال نسبت به سال ۱۳۴۹ نشان میدهد .

تمرین

۱ـ برای هرکدام از دسته دادههای زیر ، میانگین ، میانه و نمارا حسابکنید :

۲، ۵، ۹، ۱۱، ۱۳

۱، ۳، ۳، ۵، ۶، ۶

۴، ۱۰، ۲، ۸، ۴، ۱۴، ۱۰، ۱۲، ۸

۳، ۶، ۲، ۵، ۳، ۸، ۶، ۷، ۹

۱۳، ۱۹، ۱۱، ۱۷، ۱۳، ۲۳، ۱۹، ۲۱، ۱۷

−۱۰، ۲، −۲، ۱۲، −۱، ۴، ۲، ۳، −۱

۲ـ دو دسته داده‌ها به صورت دوجدول در زیر داده شده است ؛ میانگین این دودسته داده‌ها را جداگانه حساب‌کنید :

فراوانی	رده‌های داده‌ها
۱۵	۱۶—۲۱
۱۶	۲۲—۲۷
۵	۲۸—۲۳
۵	۳۴—۴۹

فراوانی	رده‌های داده‌ها
۱۰	۳۳—۳۷
۱۰	۳۸—۴۲
۵۱	۴۳—۴۷
۲۰	۴۸—۵۲

۳ـ ۹ معلم یك برگ امتحانی را نمره داده‌اند ، به خاطر اختلاف سلیقهٔ معلمین درنمره دادن ، قرار شده است‌که میانگین وزنی نمرات داده شده به عنوان نمرهٔ برگ به دست آورده شود ؛ در زیر جدول نمرات بافراوانی‌آنها تنظیم شده است ، نمرهٔ برگ را تعیین‌کنید:

نمرهٔ داده شده	۱۷/۲	۱۶/۴	۱۶	۱۶/۲	۱۶/۶
فراوانی‌آن نمره (نفر)	۱	۲	۱	۳	۲

۴ـ دریك تجربهٔ‌آماری ۱۲۰ مشاهده‌که هرمشاهده یك عدد صحیح مثبت است به دست آمده است که هیچ‌کدام صفر نمی‌باشد ؛ میانگین این اعداد۶۰/۵ می‌باشد. آیا ممکن است یکی از مشاهدات ۱۰ باشد ؟

۵ـ دریك تصاعد حسابی جملهٔ اول ۳ ، قدر نسبت ۲ وتعداد جملات ۹ است ؛ میانگین و میانهٔ جمله‌ها را حساب‌کنید ؛ آیا در جمله‌های این تصاعد‌که همان داده‌های آماری می‌باشند نما وجود دارد ؟

۶ـ در یك تصاعد هندسی جملهٔ اول ۳ ، قدر نسبت ۲ و تعداد جمله‌ها ۹ است؛ میانگین ومیانهٔ جمله‌ها را پیداکنید . آیا در این دسته داده‌های آماری نما وجود دارد ؟

۷ـ میانگین‌حسابی‌حقوق‌سالانه۹۹نفربرابر۶۰۰۰۰ ریال است؛اگر یك حقوق ۴۲۰۰۰ ریالی اضافه شود میانگین‌چه تغییری می‌کند؟

۸ـ هزینهٔ ۲۰ روز مسافرت یك دسته دانش آموز در جدول زیر نوشته شده است :

هزینهٔ روزانه	مجموع هزینه به‌ریال	تعداد روزهای مسافرت
۱۸۹۰	۹۴۵	$\frac{۱}{۲}$
۳۳۶	۸۴۰	$۲\frac{۱}{۲}$
۴۹۰	۱۴۷۰	۳
۶۶۵	۶۶۵	۱
۲۸۰	۲۲۴۰	۸
۸۴۰	۴۲۰۰	۵
۴۵۰۱	۱۰۳۶۰	۲۰

کدام نتیجهٔ زیر حقیقی‌تر است ؟

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۴۵۰۱}{۲۰} = ۲۲۵/۰۵$$

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۱۰۳۶۰}{۲۰} = ۵۱۸$$

$$\text{میانگین خرج روزانه} = \frac{۶۶۵ + ۱۴۷۰}{۲} = ۱۰۶۷/۵$$

(این دو عدد ، دوعدد میانی هستند)

۹ ـ مطلوب است محاسبهٔ میانگین،پراش وانحراف معیار هردسته از داده‌های آماری‌زیر:

۱۵ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ۲۵ ، ۳۰ ، ۳۸ ، ۴۰

۱۱ ، ۱۲ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۱۱ ، ۱۲

۱۳۰ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ۱۸

۳ ، ۶ ، ۲ ، ۵ ، ۳ ، ۸ ، ۶ ، ۷ ، ۹

۱۰ـ در جدول زیر ، بهای گوشت و برنج در سالهای ۴۸ تا ۵۳ نوشته شده است ؛ مطلوب است شاخص بهای گوشت و برنج در هرسال نسبت به سال ۱۳۴۸ و همچنین افزایش بهای هر کدام نسبت به‌آن سال :

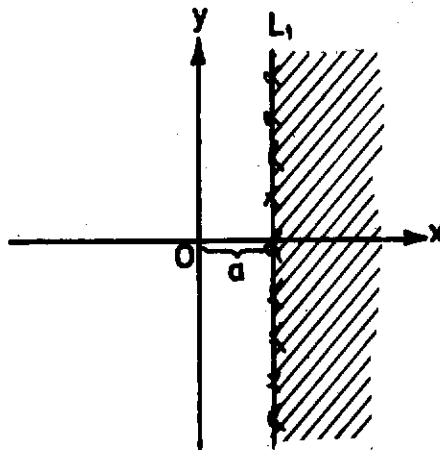
سالها	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳
برنج	۳۲	۳۳	۳۵	۳۵	۴۵	۶۰
گوشت	۱۰۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۵۰

فصل هفتم

نامعادلات خطی

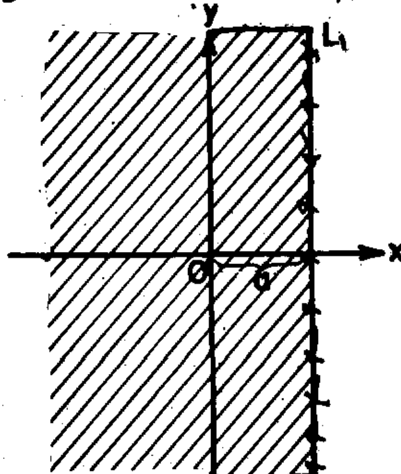
نمودار هر خط ، صفحهٔ مختصات را به‌سه ناحیه تقسیم‌می‌کند. مثلا نمودار $x = a$ صفحهٔ مختصات را به سه ناحیهٔ زیرتقسیم می‌کند:

الف : نیم‌صفحهٔ‌طرف راست L_1 که طول هر نقطهٔ آن از a بیشتر است به عبارت دیگر ،



برای هرنقطه ازاین نیم‌صفحه داریم $x > a$. برعکس نقطهٔ نظیر هر زوج ازعددهای حقیقی که متعلق‌به مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $x > a$ باشد دراین نیم‌صفحه است(**قسمت هاشور خورده**)
برای این‌که مشخص‌کنیم که این نیم‌صفحه شامل L_1 نیست روی L_1 علامتهای × می‌گذاریم این‌علامتگذاری را در آینده نیز به‌کارخواهیم برد .

ب ـ نیم صفحه طرف چپ L_1 که شامل مبدأ مختصات نیزمی‌باشد، هرنقطه‌ازاین‌نیم‌صفحه



طولش از a کوچکتر است . به‌عبارت دیگر، برای هر نقطه از این نیم‌صفحه‌داریم $x < a$. برعکس نقطهٔ نظیر هرزوج ازعددهای حقیقی که متعلق به مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $x < a$ باشد دراین نیم‌صفحه واقع است . (**قسمت هاشور خورده**)

هریك ازنیم‌صفحه‌های سمت راست یاسمت چپ L_1 که شامل خود L_1 نیست به‌نام نیم‌صفحهٔ باز خوانده می‌شود.

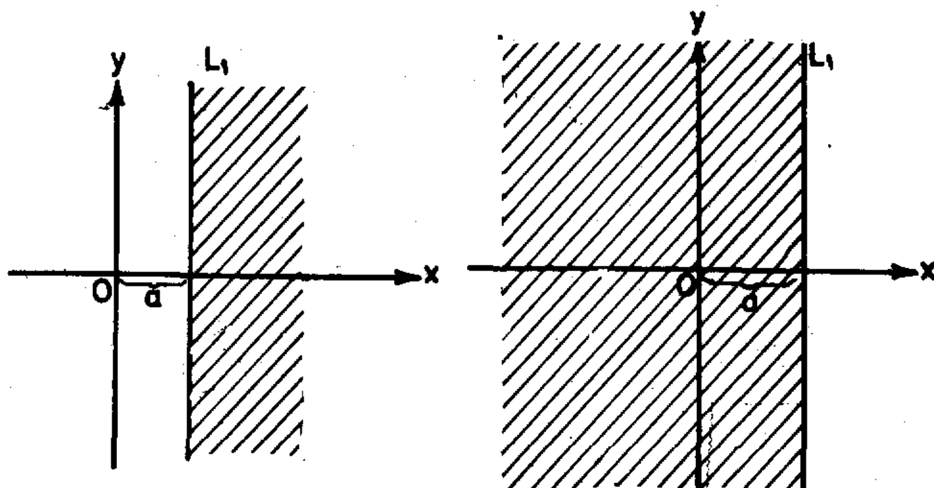
ج ـ مجموعهٔ نقاطی ازصفحه که روی L_1 واقع است ومختصات آنهادر $x = a$ صدق می‌کند.

L_1 مرز دو نیم‌صفحه خوانده می‌شود . طبق آنچه گفته شد داریم:

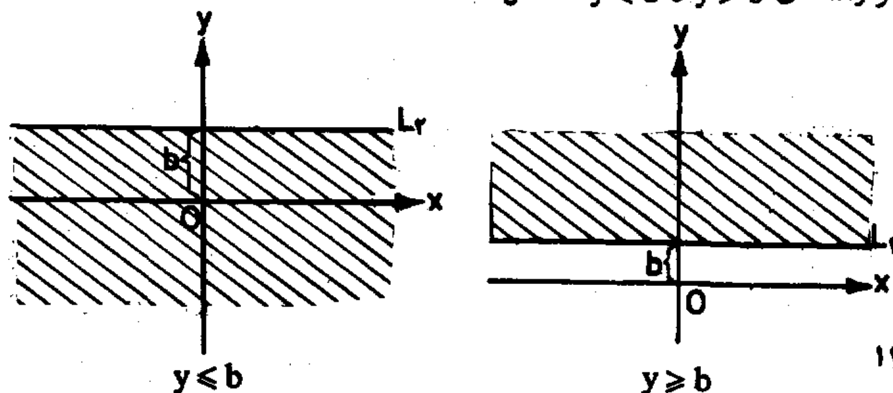
$$R^2 = \{ (x,y) \mid x = a \vee x < a \vee x > a \}$$

برای هر $a \in R$ ، نمودار هریك از رابطه‌های $\{ (x,y) \mid x \geqslant a \}$ و $\{ (x,y) \mid x \leqslant a \}$ راکه شامل خط $x = a$ نیز می‌باشند یك نیم‌صفحهٔ بسته می‌خوانند .

در زیر نمودارهای این دو رابطه رسم‌شده است.



بنا براین هر نقطه از نیم‌صفحهٔ بسته طرف راست L_1 در گزاره‌نمای $x \geqslant a$ و هر نقطه ازنیم‌صفحهٔ بستهٔ سمت چپ L_1 درگزاره‌نمای $x \leqslant a$ صدق می‌کند. درزیرنیم صفحه‌های حاصل ازگزاره‌نماهای $y \geqslant b$ و $y \leqslant b$ مشخص شده‌اند .



درحالت‌کلی خط $ax + by = c$ صفحهٔ مختصات را به نیم‌صفحه‌های باز و بستهٔ زیر تقسیم می‌کند :

۱- نیم‌صفحه‌های باز :

$$\{ (x,y) \mid x,y \in R \wedge ax + by < c \} \quad ، \quad \{ (x,y) \mid x,y \in R \wedge ax + by > c \}$$

۲ - نیم‌صفحه‌های بسته :

$$\{ (x,y) \mid x,y \in R \wedge ax + by \leqslant c \} \quad ، \quad \{ (x,y) \mid x,y \in R \wedge ax + by \geqslant c \}$$

معمولا برای سادگی، فقط به‌نوشتن گزاره‌نماهای آنها اکتفا می‌شود:

(۱) نیم‌صفحه‌های باز $ax + by < c$ و $ax + by > c$

(۲) نیم‌صفحه‌های بسته $ax + by \leqslant c$ و $ax + by \geqslant c$

روابط (۱) و (۲) را نامعادلات خطی می‌نامند .

مثال ۱ - مطلوب است رسم نمودار رابطهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد درست

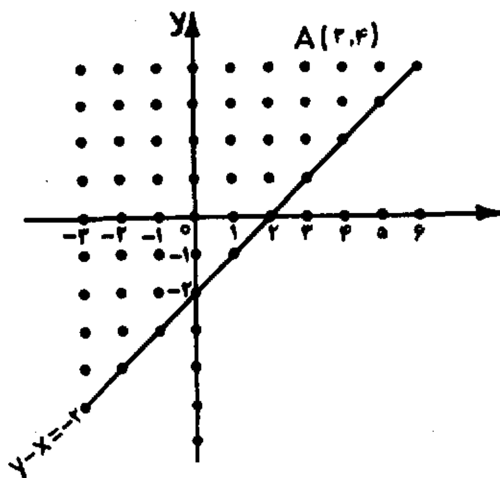
$$D = \{(x\ ,\ y) | x\ , y \in Z\ ,\ y - x > - ۲\}$$

حل - چند زوج از مجموعهٔ جواب گزاره نمای $y - x > -۲$ در زیر مشخص شده است .

$$\ldots , (۱ , ۲-) , (۰ , ۲-) , (۱- , ۲-) , (۲- , ۲-) , (۳- , ۲-)\ldots$$

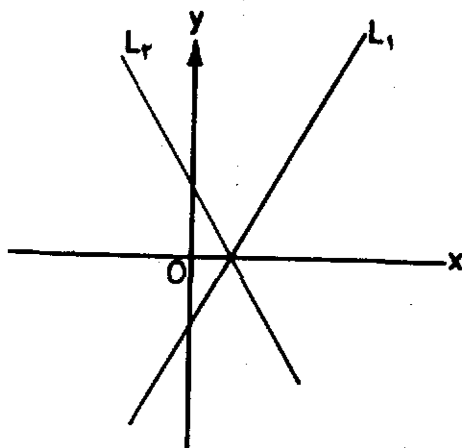
$$\ldots(۰ , ۱)\ldots , (۱- , ۱-) , (۲- , ۱-)\ldots$$

نمودار D درشکل بعد نمایش داده شده است . دراینجا دیده می‌شود نقاطی‌ازصفحه که دریك طرف نمودار $y - x = -۲$ واقع شده وشامل مبدأ مختصات می‌باشند تفاضل عرض و طول آنها از ۲- بزرگتر است . مثلا چون $۴ - ۳ > -۲$ ، نقطهٔ $A(۳ , ۴)$ روی نمودار



D واقع است . بنابراین مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه واقع در ناحیه‌ای کـه شامل مبدأ مختصات است نمودار D می‌باشد .

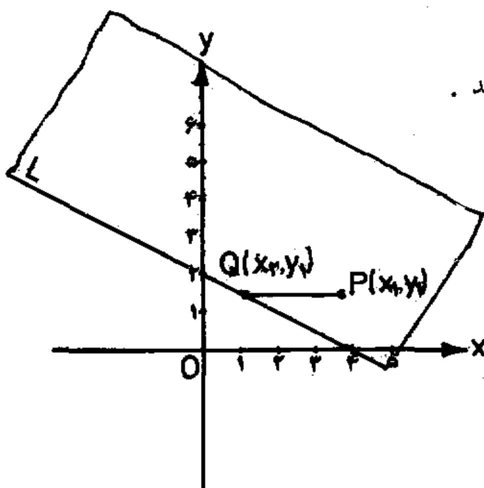
تذکر ـ گاهی اوقات به‌جای‌آن که گفته شود ناحیه‌ای از صفحه که شامل مبدأ مختصات است نمودار رابطه یا جواب نامعادله است گفته می‌شود نقاط بالا وسمت چپ L_1 یا نقاط بالا و سمت‌راست L_2 جواب مسئله می‌باشد . که L_1 و L_2 مرزهای نیم صفحه‌ها هستند .



دستور رسم نمودار نامعادلات در حالت کلی ـ رابطهٔ S در مجموعـهٔ اعداد حقیقی با گزاره نمای (نامعادله) زیر تعریف شده است : a و b و c اعداد حقیقی هستند .

$$ax + by \geqslant c$$

نمودار S را مشخص کنید .



الف ـ ابتدا خط $ax + by = c$ را رسم می‌کنیم فرض کنیم L نمایش این خط باشد .

ب ـ نقطهٔ دلخواه $P(x_1 , y_1)$ را بالا و طرف راست L انتخاب کرده ، از این نقطه

خطی‌موازی محور xها می‌کشیم تا L را در نقطهٔ $Q(x_2 , y_1)$ قطع کند ، حال مختصات دو نقطهٔ P و Q را با هم مقایسه می‌کنیم . این دو نقطه هم عرض بوده ولی طول P بزرگتر از Q است .

$$x_1 > x_2$$

اگر فرض کنیم $a > 0$ آن گاه داریم :

$$ax_1 \geqslant ax_2$$

به طرفین این نامساوی جملهٔ by_1 را اضافه می‌کنیم می‌شود :

$$ax_1 + by_1 > ax_2 + by_1 \qquad (1)$$

ولی نقطهٔ $Q(x_2 , y_1)$ روی خط $ax + by = c$ واقع است پس داریم : $ax_2 + by_1 = c$.
بنابراین نا مساوی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$ax_1 + by_1 > c$$

یعنی مختصات نقطهٔ P که در بالا وسمت راست L واقع شده است در نامعادلهٔ $ax + by \geqslant c$ صدق می‌کند و یا زوج(x_1 , y_1) عضوی از رابطهٔ S است . چون P یك نقطهٔ اختیاری‌است، پس تمام نقاط صفحه که در بالا و سمت راست L قرار دارند روی نمودار S واقع هستند . روشن است که در اینجا خود L نیز جزء جواب است .

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که در این حالت اگر نقطه‌ای از صفحه پایین L و طرف چپ آن باشد به S تعلق ندارد . یعنی مختصات آن در نامعادلهٔ $ax + by \geqslant c$ صدق نمی‌کند . مثلا مبدأ که در طرف چپ L قرار دارد مختصات آن در $ax + by \geqslant c$ صدق نمی‌کند. یعنی مبدأ مختصات وتمام نقاطی که‌بااین نقطه در یك‌طرف L هستند جواب نمی‌باشند.

اگر $a < 0$ ، جواب به‌چه صورت خواهد بود ؟

از این موضوع برای تعیین‌نقاطی از صفحه که مختصات‌آنها در نامعادلهٔ $ax + by \geqslant c$ صدق می‌کند استفاده کرده به ترتیب زیر عمل می‌کنند .

ـ ابتدا نمودارگزاره نما (معادلهٔ) : $ax + by = c$ را در صفحهٔ مختصات رسم‌می‌کنند.

ـ مختصات یك نقطه از صفحه را که معمولا ، برای سهولت ، مبدأ مختصات انتخاب می‌شود در گزاره‌نمای $ax + by \geqslant c$ قرار می‌دهند . اگر این نقطه جواب بود ، آن گاه نیم صفحهٔ بسته‌ای که شامل نقطه است نمودار نامعادلهٔ $ax + by \geqslant c$ خواهد بود . اگر این نقطه جواب نباشد ، آن‌گاه نیم صفحهٔ بسته‌ای که شامل این نقطه نیست جواب خواهد بود .

ـ در حالتی که $c = 0$ ، داریم : $ax + by \geqslant 0$. در این صورت برای پیدا کردن مجموعهٔ جواب نقطه‌ای غیر از مبدأ انتخاب می‌کنند . برای سادگی معمولا این نقطه را روی یکی از محورها انتخاب می‌نمایند .

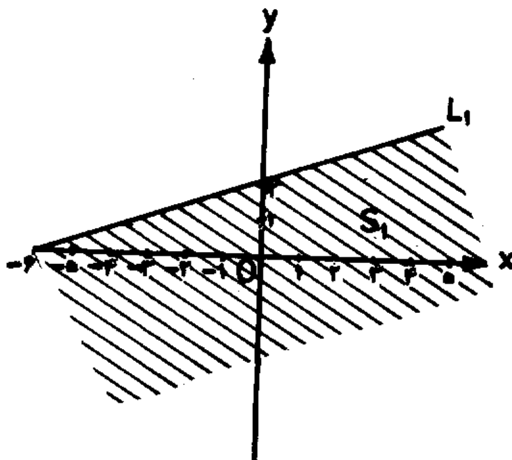
مثال ۱ ـ مطلوب است رسم نمودار رابطهٔ $S_۱$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی که با نامعادلهٔ زیر مشخص شده است .

$$۳y - x \leqslant ۶ \qquad (۱)$$

واضح است که :

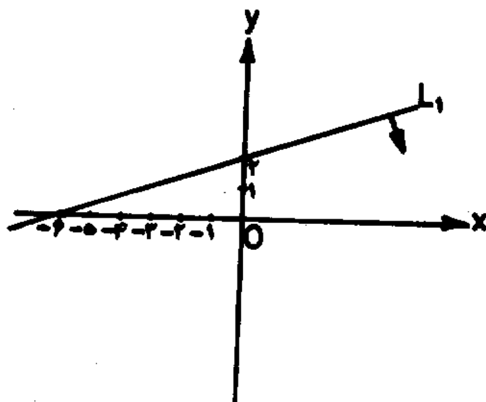
$$S_۱ = \{(x\ ,\ y) | ۳y - x \leqslant ۶\}$$

همان طورکه گفته شد ، ابتدا خط $۳y - x = ۶$ را که به $L_۱$ نشان داده می‌شود رسم می‌کنیم



سپس مختصات نقطهٔ (۰ ,۰) را درگزاره نمای (۱) قرار می‌دهیم : ۰ − ۰ ⩽ ۶ . چون حاصل یک گزارهٔ درست است نیم صفحهٔ بسته‌ای که شامل (۰ ,۰) می‌باشد نمودار $S_۱$ است .

تذکر ـ گاهی اوقات برای جلوگیری ازشلوغ شدن شکل ، مجموعهٔ جواب را باکشیدن یک پیکان، مطابق شکل، نمایش می‌دهند .

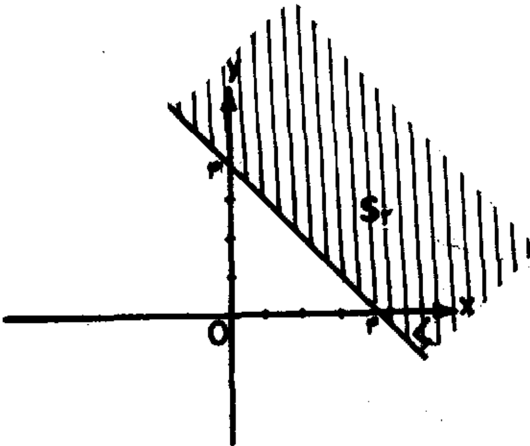


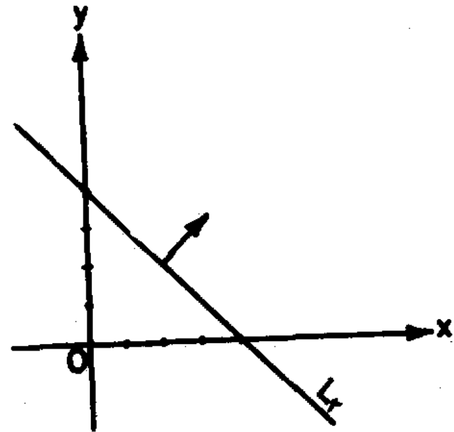
مثال ۲ ـ مطلوب است رسم نمودار رابطهٔ $S_۲$ درمجموعهٔ اعداد حقیقی که با نامعادلهٔ

زیر مشخص شده است .

$$x + y \geqslant ۴ \qquad (۲)$$

ابتدا خط $x + y = ۴$ راکه به$L_۲$ نشان می‌دهیم رسم کرده سپس مختصات مبدأ را در (۲) قرارمی‌دهیم . گزارهٔ نادرست $۴ \leqslant ۰ + ۰$ به دست می‌آید . بنابراین، همان‌طورکه در شکلها نیزدیده می‌شود ، جواب شامل مبدأ مختصات نیست .



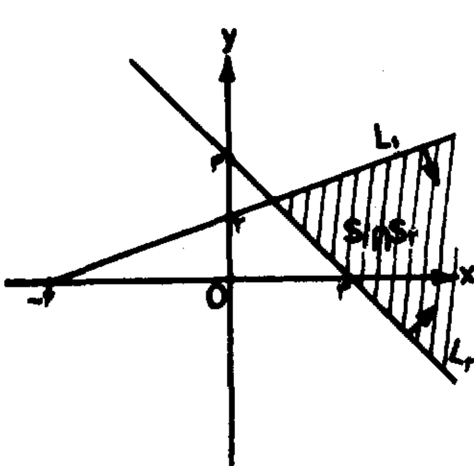


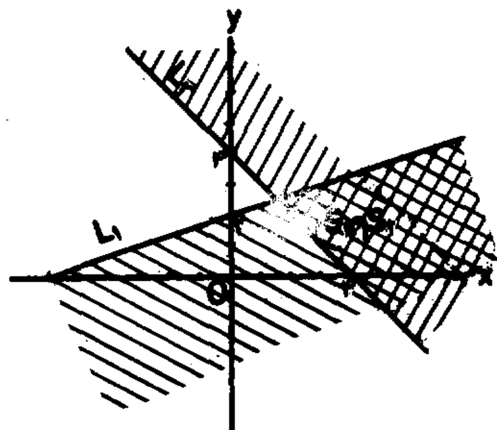
مثال ۳ ـ مطلوب است رسم نمودارS، درمجموعهٔ اعداد حقیقی که با دستورزیر مشخص شده است .

$$S = S_۱ \cap S_۲ \qquad$$ ($S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب رابطه‌های مثالهای ۱و۲ هستند)

واضح است که دراینجا گزاره نمای داده شده عبارت است از :

$$۲y - x \leqslant ۶ \wedge x + y \geqslant ۴$$





که ما برای سادگی این گزاره نما را به صورت نامعادلات :

$$\begin{cases} 3y - x \leqslant 6 & (1) \\ x + y \geqslant 4 & (2) \end{cases}$$

نوشته آن را یك دستگاه نامعادلات خطی می‌خوانیم . این طرز نوشتن را برای تعداد بیشتری گزاره نما نیز درآینده به‌کار خواهیم برد. نمودار $S_1 \cap S_2$ و یا نمودار این دستگاه نامعادلات شامل نقاطی از صفحه است که مختصات آنها هم در S_1 وهم در S_2 صدق کند .باتوجه به‌نمودارهای مثالهای ۱ و۲ ، نمودار خواسته شده درصفحهٔ قبل نشان داده شده است .

مثال ۴ ـ مطلوب‌است رسم نمودار رابطهٔ S ، درمجموعهٔ اعداد حقیقی که با دستورهای زیر مشخص شده است .

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

که درآن S_1 و S_2 رابطه‌های مثالهای ۱ و ۲ بوده و $S_3 = \{(x,y) \mid x \leqslant 4\}$ می‌باشد

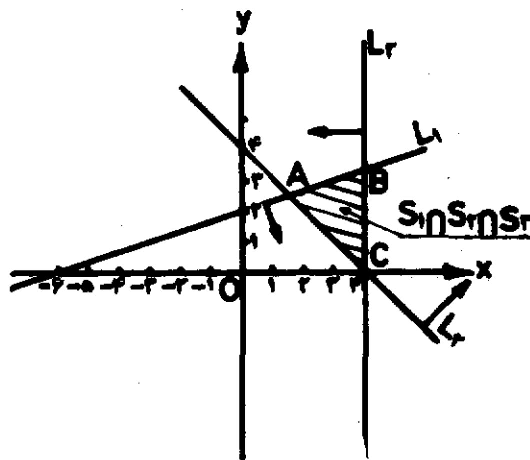
دراینجا باید نمودار رابطهٔ :

$$S = \{(x,y) \mid (3y - x \leqslant 6) \wedge (x + y \geqslant 4) \wedge x \leqslant 4\}$$

رارسم کنیم که آن را، طبق آنچه گفته شد، به‌صورت دستگاه نامعادلات زیرنمایش می‌دهیم :

$$\begin{cases} 3y - x \leqslant 6 \\ x + y \geqslant 4 \\ x \leqslant 4 \end{cases}$$

این نمودار باتوجه به مثالهای ۱و۲ و۳به صورت زیراست . نقاط داخل یا روی اضلاع مثلث ABC نمودار دستگاه بالاست .

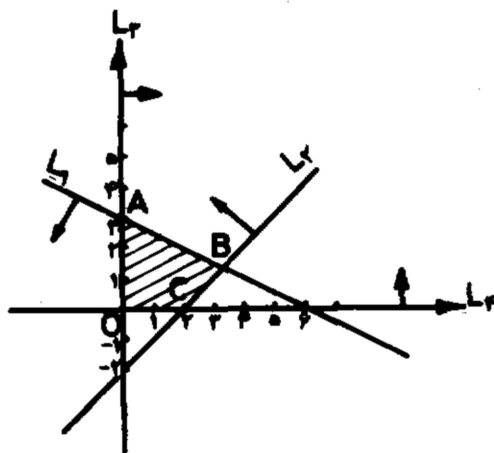


مثال ۵ ـ نمودار دستگاه نامعادلات زیررا رسم کنید. (دراین‌طورمسائل منظوررسم دریك دستگاه مختصات است) .

$$\begin{cases} x + ۲y \leqslant ۶ \\ x - y \leqslant ۲ \\ x \geqslant ۰ \\ y \geqslant ۰ \end{cases}$$

هرگاه $L_۱$ ، $L_۲$ ، $L_۳$ و $L_۴$ به ترتیب نمایش خطوط $x + ۲y = ۶$ ، $x - y = ۲$ ، $x = ۰$ و $y = ۰$ باشند نمودار این دستگاه به صورت زیر است :

این نمودار شامل نقاط داخل و روی اضلاع چهارضلعی محدب OABC می‌باشد . رأسهای‌این‌چهار ضلعی‌یعنی نقاط O، A، B وC را نقاط فرینه (اکسترموم) می‌نامند.



بیشینه یا کمینه کردن عبارت $ax + by$

دراقتصاد وتجارت ، مسائلی‌مطرح می‌شودکه برای حل‌آنها باید بیشترین مقداریاکمترین مقداریك عبارت جبری‌به صورت $ax + by$ راکه درآن زوجهای (x, y)متعلق به یك مجموعهٔ خاص ، نظیرمجموعهٔ نقاط داخل یاروی اضلاع چند ضلعی محدب ، می‌باشد به دست‌آورد .

این مسئله‌به‌نام بیشینه‌کردن (ماکزیمم کردن) یاکمینه کردن (می‌نیمم کردن) معروف‌است، برای روشن‌شدن مطلب به‌ذکرمثال زیرمی‌پردازیم:

مثال ـ بیشترین‌مقدار وکمترین مقدارعبارت $۲x + ۳y$ را به‌ازای عضوهای مجموعهٔ :

$$A = \{ (۲,۱) , (۳,۲) , (۱,۳) , (۲,۵) , (۴,۲) \}$$

به‌دست آورید .

برای سادگی عبارت $۲x+۳y$ را به P نشان می‌دهیم:

$$P=۲x+۳y$$

حال مقدار P را به‌ازای هرعضو A حساب می‌کنیم:

$$(x,y)=(۲,۱) \Rightarrow P=۴+۳=۷ \qquad (۱)$$

$$(x,y)=(۳,۲) \Rightarrow P=۶+۶=۱۲ \qquad (۲)$$

$$(x,y)=(۱,۳) \Rightarrow P=۲+۹=۱۱ \qquad (۳)$$

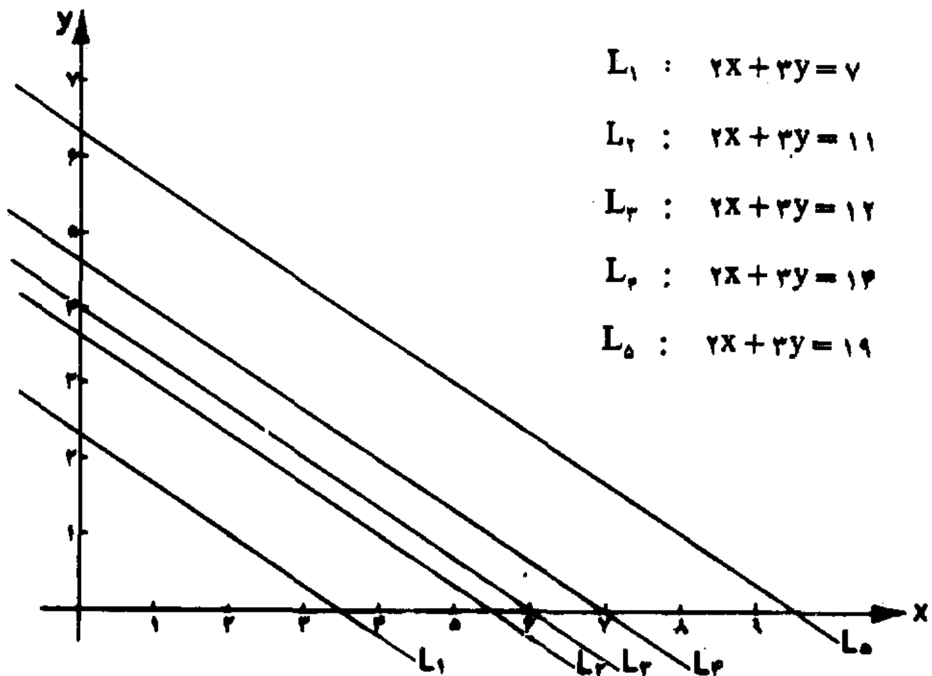
$$(x,y)=(۲,۵) \Rightarrow P=۴+۱۵=۱۹ \qquad (۴)$$

$$(x,y)=(۴,۲) \Rightarrow P=۸+۶=۱۴ \qquad (۵)$$

به‌طوری که دیده می‌شود P به‌ازای (۲,۱) کمترین مقدار و به‌ازای (۲,۵) بیشترین مقدار را دارد.

واضح است که اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ A زیاد باشد پیدا کردن بیشترین مقدار و کمترین مقدار P با روش بالا عملی وحتی‌گاهی اوقات ممکن نیست. معمولا این‌گونه مسائل را با روش نمودارحل می‌کنند واین مطلب درحقیقت اساس برنامه‌ریزی باروش ترسیم است.

نکتهٔ دیگر درمورد مثال بالا این است‌که نمودار $P=۲x+۳y$ ، به‌ازای‌مقادیرمختلف P، یک‌دسته خطوط موازی است. مثلانظیر زوجهای (۱) تا (۵) بالا خواهیم‌داشت:



در اینجا خط L_1 ازهمه به‌مبدأ نزدیکتر و خط L_5 از همه دورتر است . به‌عبارت‌دیگر، دوری ونزدیکی خط $P = 2x + 3y$ ازمبدأ به‌مقدار P بستگی دارد، هرچه P بزرگتر شود خط از مبدأ دورتر است وبا عرض ازمبدأ یاطول‌آن‌بیشتراست‌وبالعکس،بنابراین برای به‌دست آوردن بیشترین یاکمترین اندازهٔ P باید عرض یاطول از مبدأ $P = 2x + 3y$ بیشینه یا کمینه کرد.

با توجه به بحث فوق ، هدف از حل این‌گونه مسائل پیدا کردن نقطه یا نقاطی از این نمودار است که یکی‌از دسته خطوط موازی مورد نظر از آن (آنها) گذشته وعرض یاطول از مبدأ آن بیشترین یا کمترین مقدار را داشته باشد .

مثال ۱ - بیشترین اندازهٔ عبارت $x + 5y$ راکه درآن x و y باید درشرایطزیرصدق‌کند به‌دست آورید .

$$\begin{cases} 5x + 6y \leqslant 30 \\ 3x + 2y \leqslant 12 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

هرگاه عبارت $x + 5y$ را مساوی P قرار دهیم خواهیم داشت :

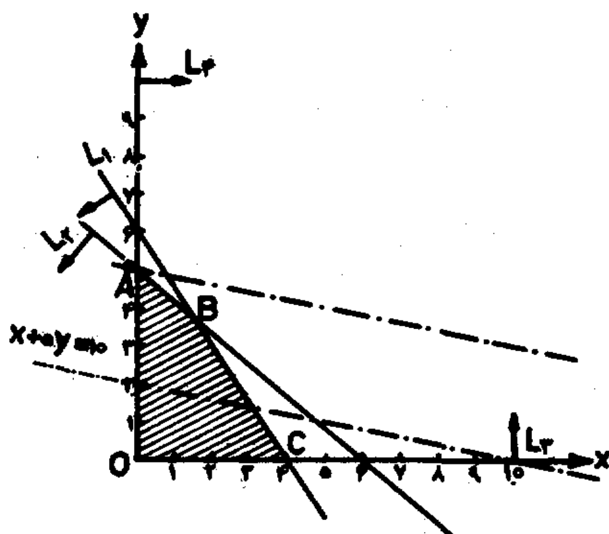
$$P = x + 5y \qquad (2)$$

برای پیدا کردن بیشترین‌مقدارP، باید خطی را ازدستهٔ خطوط (۲) مشخص‌کنیم‌که دست‌کم‌از یکی‌ازنقاط داخل یا روی اضلاع چهارضلعی نمودار دستگاه نامعادلات (۱)گذشته وعرض‌ازمبدأ آن بیشینه‌گردد . می‌دانیم‌که نمودار(۲) یك دسته خطوط موازی با ضریب‌زاویه‌ای $-\frac{1}{5}$ است. معادلهٔ یکی ازاین خطوط به‌ازای $P = 10$ برابر است با :

$$10 = x + 5y$$

حال اگر در (۲) ، مقدار x را مساوی صفر قراردهیم عرض از مبدأ خط برابر می‌شود $y = \frac{P}{5}$. وقتی این عرض از مبدأ بیشینه‌گردد مقدار P بیشینه شده درنتیجه‌عبارت $x + 5y$ بیشترین مقداررا خواهدداشت.

نمودار دستگاه نامعادلات وخط $x + 5y = 10$ در زیر رسم شده است.

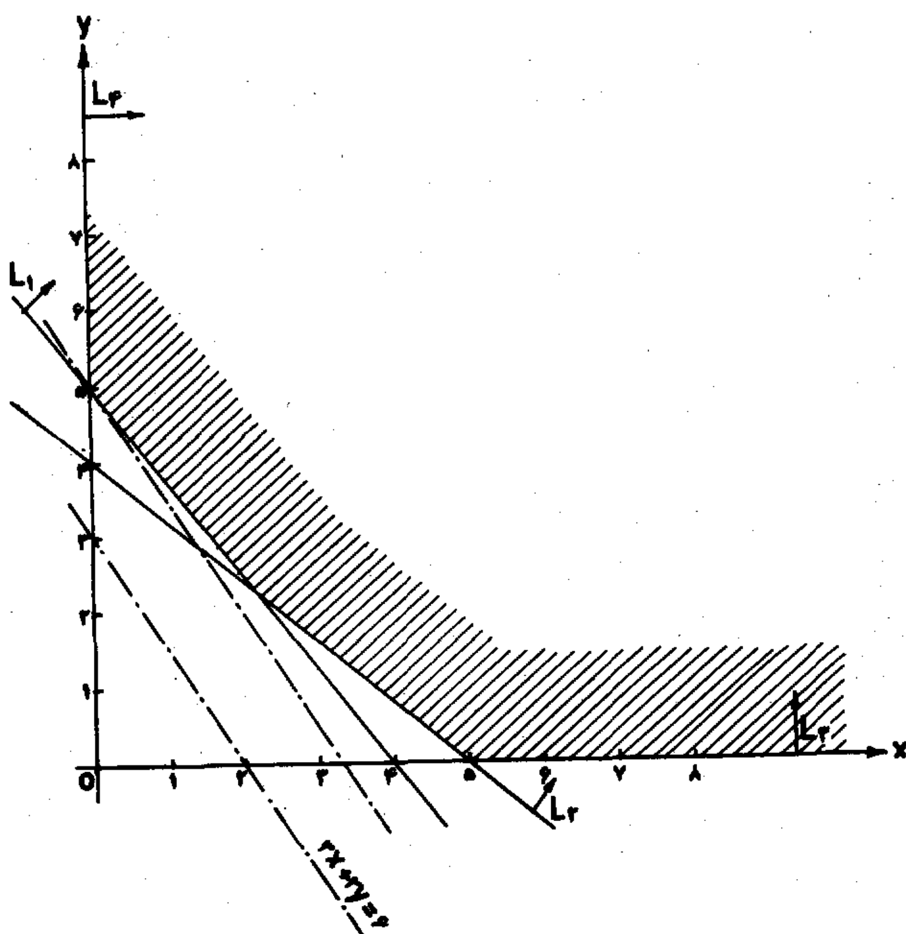


در شکل L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 به ترتیب نمودارهای معادلات $3x + 2y = 12$ ، $5x + 6y = 30$ ، $x = 0$ و $y = 0$ می‌باشند . همچنین نمودار $x + 5y = 10$ به‌صورت خط‌ـ نقطه رسم شده است. درشکل‌دیده‌می‌شود خطی‌که ازنقطهٔ $A(0,5)$ به‌موازات $x + 5y = 10$ رسم می‌شود بزرگترین عرض ازمبدأ را دربین‌دسته خطوط موازی $x + 5y = P$ دارد. بنابراین زوج $(0,5)$ عبارت $x + 5y$ را بیشینه می‌کند .

مثال ۲ ـ کمترین اندازهٔ عبارت $3x + 2y$ راکه درآن x و y باید درشرایطزیر صدق‌کنند به‌دست آورید :

$$\begin{cases} 5x + 4y \geqslant 20 \\ 4x + 5y \geqslant 20 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

عبارت $3x + 2y$ را مساوی P قرارداده، ابتدای نمودار دستگاه‌و خط $3x + 2y = 6$ ، را به‌ازای $P = 6$ یعنی یکی‌ازدسته‌خطوط $3x + 2y = P$ ، را رسم می‌کنیم، در شکل L_1،L_2 و L_3 و L_4 به‌ترتیب نمودارهای معادلات $5x + 4y = 20$ ، $4x + 5y = 20$ ، $x = 0$ و $y = 0$ می‌باشند. همچنین نمودار $3x + 2y = 6$ به‌صورت خط نقطه رسم شده است.



به طوری که دیده می‌شود نقطهٔ (۵ , ۰) جواب مسئله است[۱] .

ماکزیمم یا می‌نیمم کردن تابع $p=ax+by$ تحت شرایط داده شده به‌نام برنامه‌ریزی خطی خوانده می‌شود . زیرا ، هم تابع داده شده و هم نامعادلات ازدرجه اول وخطی‌می‌باشند.

تمرین

(در این تمرینات x و y متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی است)

۱ـ در هر یك از حالات زیر ، تحقیق‌کنید آیا نقطه‌های داده شده در نامعادلهٔ داده شده

---

۱ ـ فرق این مسئله با مسئلهٔ قبل این است که در اینجا مجموعهٔ جواب بسته نیست . در این کتاب‌ما برای این‌حالت تابع $P=ax+by$ را فقط مینیمم می‌کنیم وازبحث این که‌آیادراین حالت می‌توان‌P را ماکزیمم کرد یا نه صرف‌نظر می‌کنیم .

صدق می‌کند یا نه ؟

الف ـ $(3,2)$ ، $(1,2)$ ؛ $3x - 2y < 7$ ؛ ب ـ $(2,-1)$ ، $(2,1)$ ؛ $y - x \leqslant 0$ ؛

ج ـ $(4-1)$ ، $(1,-2)$ ؛ $2x + y > 0$

۲ ـ نمودار هر یك از نامعادلات زیررا رسم کنید .

$3x - 6y \leqslant 9$ ؛ $y > 2x$ ؛ $2x - y < -8$ ؛ $x - 2y > -4$

۳ـ نمودار هر یك از دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید .(ناحیه‌ای‌که مختصات آن در نامعادلات‌زیر صدق می‌کند پرداز بزنید)

$\begin{cases} y \geqslant x - 2 \\ y \leqslant x + 6 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} y < -x \\ x > 0 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} y > -x \\ x < 0 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} y \geqslant x \\ x \leqslant 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -x - 2y \leqslant -4 \\ -x + 2y \leqslant 12 \\ 5x + 3y \geqslant 15 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 2x + 3y < 6 \\ -3x + y \leqslant 3 \\ y \geqslant 3 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} -x - 2y < -4 \\ -x + 2y \geqslant 4 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y \geqslant 6 \\ x + y \geqslant 4 \\ x + 3y \geqslant 6 \\ x + y \leqslant 6 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x + y \geqslant 4 \\ 3x + y \geqslant 6 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$

۴ ـ بیشترین اندازهٔ عبارت $x + 2y$ را که در آن x و y باید در شرایط زیر صدق کنند به دست آورید .

$$\begin{cases} x + y \leqslant 6 \\ y \geqslant 2 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

۵ ـ اولا نمودار دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید .

$$\begin{cases} x + y \leqslant 4 \\ y \leqslant x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ثانیاً نقطه‌هایی متعلق به‌این‌نمودار مشخص‌کنیدکه مختصات‌آنها اعداد درست باشند .

ثالثاً در معادلهٔ $P = x + 2y$ ، مقدار P را به قسمی تعیین کنید که خط حاصل نمودار

دستگاه را قطع کرده و عرض از مبدأ آن کمینه گردد .

۶- کمترین مقدار عبارت $A = 2x + y$ را تحت شرایط زیر پیدا کنید .

$$\begin{cases} 3x + y \geqslant 9 \\ x + 3y \geqslant 11 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

۷- اولا نمودار دستگاه نامعادلات زیر را رسم کنید .

$$\begin{cases} x + y \leqslant 10 \\ 4 \leqslant y \leqslant 7 \\ 2 \leqslant x \leqslant 6 \\ y \geqslant 7 - x \end{cases}$$

ثانیاً تعیین کنید کدام یك از زوجهای : (۸،۸) ، (۷،۲) ، (۴،۵) ، (۳،۶) ، (۴،۲) ، (۶،۳) متعلق به نمودار دستگاه بالاست .

ثالثاً کمترین و بیشترین مقدار عبارت $y + 4x$ را به‌ازای نقاط نمودار دستگاه‌پیداکنید .

فصل هشتم

برنامه‌ریزی خطی

مقدمه ـ در دنیای امروز ، صنعت و تجارت ازکارهای بسیارمهم هستند که گردانندگان آنها به‌علت رقابتهای سخت موجود سعی‌می‌کنند درچهارچوب عاملها ، منابع ونیروی انسانی موجود هزینه‌هایی‌از قبیل دستمزد، اجاره،کرایه‌حمل‌ونقل وغیره را تاآنجاکه ممکن است پایین نگه‌دارند و درعوض‌کیفیت ، بازده و کارآیی را بالاببرند ، تا بدین‌وسیله بتوانند حداکثر سود ممکن را به‌دست آورند .

دراین‌بخش‌مختصری‌ازموقعیتهای‌خاص اقتصادی ، اجتماعی وتجارتی‌راکه به‌ریاضی‌مربوط می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهیم. توصیف ریاضی این موقعیتها منجر به‌حل مسائلی می‌شودکه مبحث « برنامه ریزی » را تشکیل می‌دهند.

در برنامه‌ریزی شرایط موجود در کارخانه را با رابطه‌های دقیق ریاضی نشان داده و با استفاده ازآنها شرطی‌که سودرا بیشینه (ماکزیمم) و یا هزینه راکمینه(می‌نیمم) می‌کند انتخاب می‌شود . به‌طور خلاصه می‌توان‌گفت :

برنامه‌ریزی یعنی طرح‌ریزیهای فعالیتها روی منابع موجود و محدود به‌قسمی که نتیجهٔ کار تاحد امکان ایده‌آل باشد .

در زیر چند نمونه ازمسائلی راکه موردبحث این‌بخش است می‌آوریم. دراین‌مسائل‌منابع محدود وموجود مانند منابع مواد غذایی، نیروی انسانی، مالی، سوخت، ... میان فعالیتهای مختلف تقسیم می‌شود.

مسئلهٔ ۱ ـ برای یك ایستگاه فضایی بسته‌های غذایی تهیه می‌شود. هربسته باید شامل دست‌کم۵ کیلوگرم ازمادهٔ A و ۱۰ کیلوگرم ازمادهٔ Bباشد. وزن‌هربسته برابر۲۰ یا۳۰کیلوگرم یا بین ۲۰ تا ۳۰ کیلوگرم است. هرگاه بهای مواد غذایی A ازقرار کیلویی ۱۰۰ ریال وبهای مواد غذایی B ازقرارکیلویی ۲۰۰ریال باشد، تعیین‌کنید چندکیلوگرم از هریك ازمواد AوB باید ترکیب‌کنیم تا بهای هربسته به‌ارزانترین قیمت ممکن باشد.

مسئلهٔ۲ ـیك چاپخانه استادکار وشاگرداستخدام می‌کند. شرایط موجودبه قرارزیراست:

۱ ـ این‌چاپخانه حداکثر می‌تواند ۹نفر استخدام‌کند .

۲ ـ طبق سفارشات رسیده چاپخانه مجبوراست روزانه اقلا ۳۰ واحد چاپ (فورم) تحویل دهد.

۳ ـ طبق قانون کار این چاپخانه درمقابل حداکثر ۵ استادکار وحداقل ۲ استادکار باید یك شاگرد داشته باشد .

۴ ـ هراستادکار روزانه ۵ واحد چاپ وهرشاگرد ۳ واحد چاپ می‌تواند تحویل دهد .

۵ ـ مزد روزانهٔ هراستادکار ۱۰۰۰ ریال وهرشاگرد ۵۰۰ ریال تعیین‌شده است .

تعیین‌کنید باشرایط بالا، مدیرچاپخانه چه تعدادی استاد وشاگرد استخدام‌کند تاکمترین مزد را پرداخت نماید .

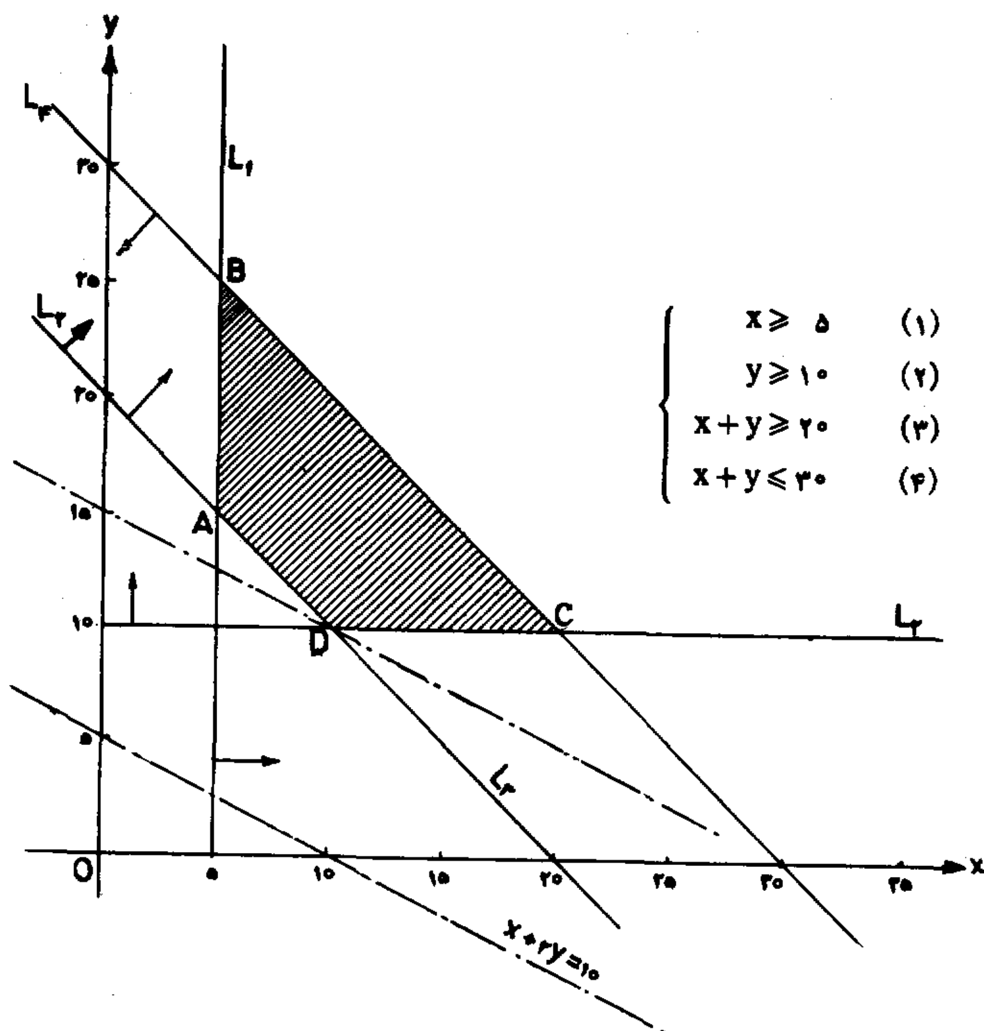
مسئلهٔ حمل ونقل ـ دربیشتر سازمانهای‌صنعتی به هزینهٔ حمل‌ونقل کالا، اعم‌از حمل‌مواد خام به‌کارخانه یا توزیع فراورده‌های کارخانه به‌مشتریان اهمیت خاص داده می‌شود . مدیران کارخانه‌ها همیشه سعی می‌کنندکه این هزینه را تاحد ممکن پایین نگه دارند . مثلا صرفه‌جویی درهزینهٔ به‌کار انداختن‌تانکرهای نفتی،چه درخشکی وچه دردریا ، برای شرکتهای بزرگ‌نفتی جنبهٔ حیاتی دارد . برای رسیدن به این هدف ، معمولا مدیران مسئول برنامه‌های‌کار خود را روی نتایج برنامه‌ریزی قرارمی‌دهند . مسئلهٔ زیر نمونه‌ای ازاین‌گونه است :

مسئلهٔ۴ ـ یك کارخانهٔ ماشین‌سازی برای انبارکردن فراورده‌های خود دومحل D_1 و D_2 دراختیاردارد. ظرفیت‌این‌دوانبار به‌ترتیب ۸۰ و ۲۰ دستگاه ماشین‌است. دوشرکت C_1 و C_2 برای تاریخ‌معینی به‌ترتیب سفارش ۵۰ و ۳۰ دستگاه ازماشینهای‌این کارخانه را داده‌اند. هزینهٔ‌حمل‌ونقل به فاصلهٔ انبارها تامحل تحویل ماشینها بستگی دارد . فاصلهٔ هریك ازاین انبارها ازمحلهای‌این دوشرکت ، برحسب کیلومتر، درجدول زیرنشان داده شده است :

انبار \ شرکت	C_1	C_2
D_1	۴۰	۳۰
D_2	۱۰	۲۰

تعیین‌کنید برای‌هرمشتری از هرانبار چه تعدادی ماشین حمل‌شود تا هزینهٔ حمل و نقل کمینه (می‌نیمم) گردد .

حل مسئلهٔ ۱ ـ فرض‌کنیم برای یک بسته ، x کیلو ازمادهٔ A و y کیلو ازمادهٔ B ترکیب کرده باشیم ، آن‌گاه بنابر فرض داریم :



$$\begin{cases} x \geqslant ۵ & (۱) \\ y \geqslant ۱۰ & (۲) \\ x+y \geqslant ۲۰ & (۳) \\ x+y \leqslant ۳۰ & (۴) \end{cases}$$

خطهای حاصل از دستگاه نامعادلات بالا را به ترتیب به L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 نمایش می‌دهیم . با روشی‌که گفته شد مجموعهٔ جواب دستگاه بالا را به دست می‌آوریم (چهارضلعی پرداز خورده) .

هرگاه قیمت یک بسته را به P ۱۰۰ ریال نشان دهیم (ضریب ۱۰۰ برای ساده کردن بحث به‌کاررفته است) آن‌گاه بنابر فرض مسئله خواهیم داشت :

$$۱۰۰x + ۲۰۰y = ۱۰۰P$$

$$x + ۲y = P \qquad (۵)$$ و با

دراینجا باید جوابی از دستگاه نامعادلات فوق را پیدا کنیم که $x+2y$ را کمینه کند .
می‌دانیم که معادلهٔ (۵) معادلهٔ یك دسته خطوط موازی با ضریب زاویه‌ای $-\frac{1}{2}$ است که یکی از این خطوط ، به ازای $P=10$ برابراست با :

$x+2y=10$ (این خط به صورت خط ـ نقطه در شکل رسم شده است) . حالا همان طور که دیدیم، نقطه‌ای ازداخل یا روی اضلاع چهارضلعی ABCD می‌خواهیم که یکی از دسته خطوط (۵) ازآن عبور کرده عرض ازمبدأ آن کمینه باشد . این‌خط که به موازات $x+y=10$ رسم شده درنمودار باخط نقطه نشان داده شده است . در شکل می‌بینید که نقطهٔ خواسته شده عبارت است از $D(10,10)$ (یعنی ازهریك ازمواد A و B باید ۱۰ کیلوگرم انتخاب شود) .
به ازای مختصات این‌نقطه ، $P=30$ ، یعنی قیمت یك بسته $100P=3000$ ریال است که کمترین قیمت ممکنه است .

حل مسئلهٔ ۲ ـ فرض‌کنید مدیر چاپخانه ، x استادکار و y شاگرد استخدام‌کند، آن‌گاه شرایط‌کارخانه به صورت زیرخواهد بود :

$$\begin{cases} x+y\leqslant 9 & (L_1) & \text{شرط (۱)} \\ 5x+3y\geqslant 30 & (L_2) & \text{شرط (۲) و (۴) :} \\ 5y\geqslant x & (L_3) & \text{شرط (۳)} \\ 2y\leqslant x & (L_4) & \text{شرط (۳)} \end{cases}$$

هرگاه مجموع مزدپرداختی را با $500P$ (ضریب ۵۰۰ برای سادگی به‌کار رفته است) نمایش دهیم باتوجه به فرض‌آخر مسئله خواهیم داشت :

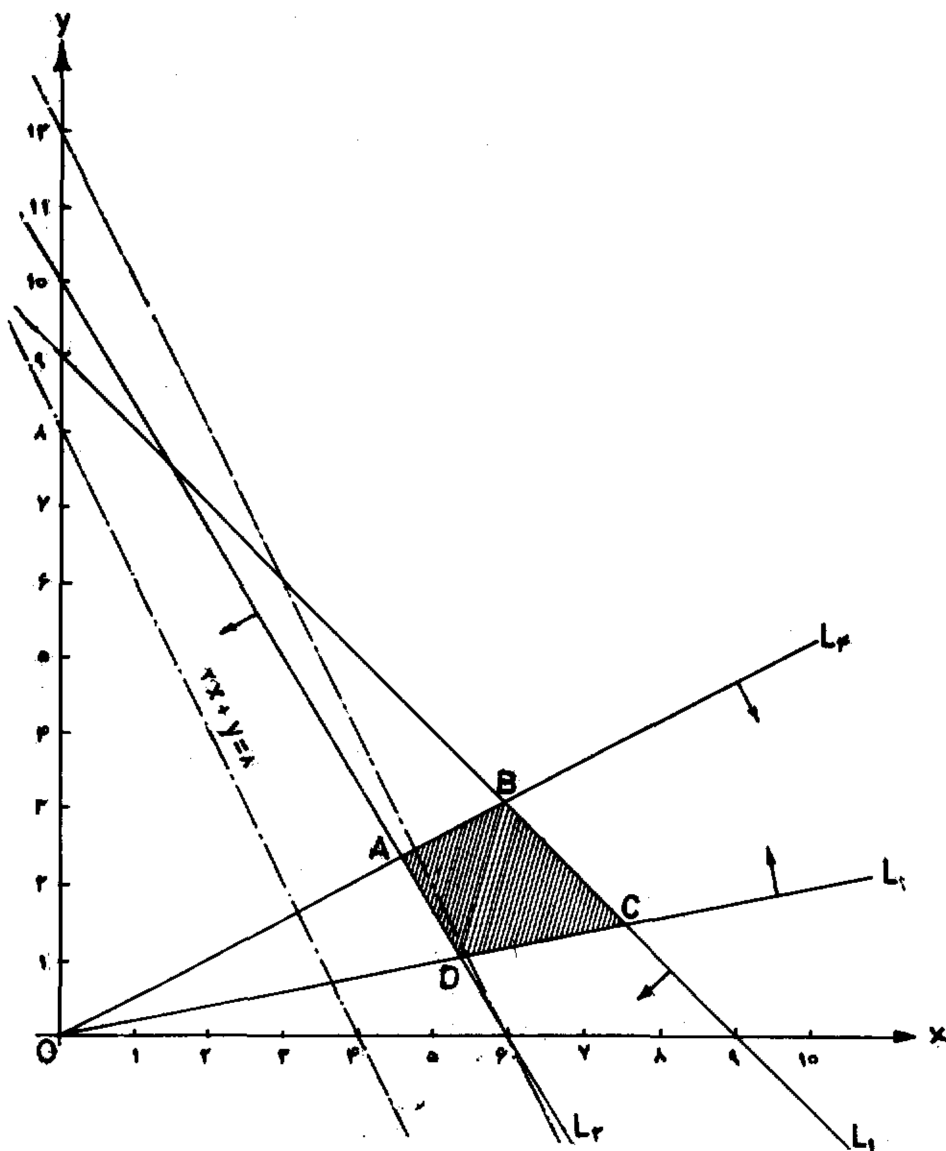
$$1000x+500y=500P$$

و یا

$$2x+y=P \qquad (1)$$

یکی‌از دسته خطوط موازی (۱) به ازای ، $P=8$ ، برابراست با $2x+y=8$ ، در صفحهٔ بعد نمودار دستگاه ونمودار $2x+y=8$ رسم شده است .

حال نقطه‌ای داخل یا روی اضلاع چهارضلعی ABCD می‌خواهیم که یکی از دسته خطوط (۱) ازآن عبورکرده عرض ازمبدأآن بیشینه باشد . این‌خط‌که به‌موازات $2x+y=8$ رسم شده در شکل با خط ـ نقطه نشان داده شده است ، این خط چهار ضلعی ABCD را در طول یك‌پاره‌خط قطع می‌کند که فقط نقطهٔ (۵,۲) آن‌که مختصاتش اعداد صحیح است قابل قبول می‌باشد . یعنی مدیر چاپخانه باید درمقابل ۵ استادکار ۲ شاگرد استخدام نماید تا دستمزد را



به‌کمترین مقدار برساند. دراینجا نیزمختصهای (x,y) باید اعداد درست مثبت‌باشند.

حل مسئلهٔ ۳ ـ فرض کنیم از انبار D_1 ، x و y دستگاه ماشین به ترتیب به C_1 و C_2 ارسال شود، با توجه به فرض مسئله داریم :

ظرفیت انبار D_2 : $(50-x)+(30-y) \leqslant 20$

و یا پس از ساده شدن : $x+y \geqslant 60$

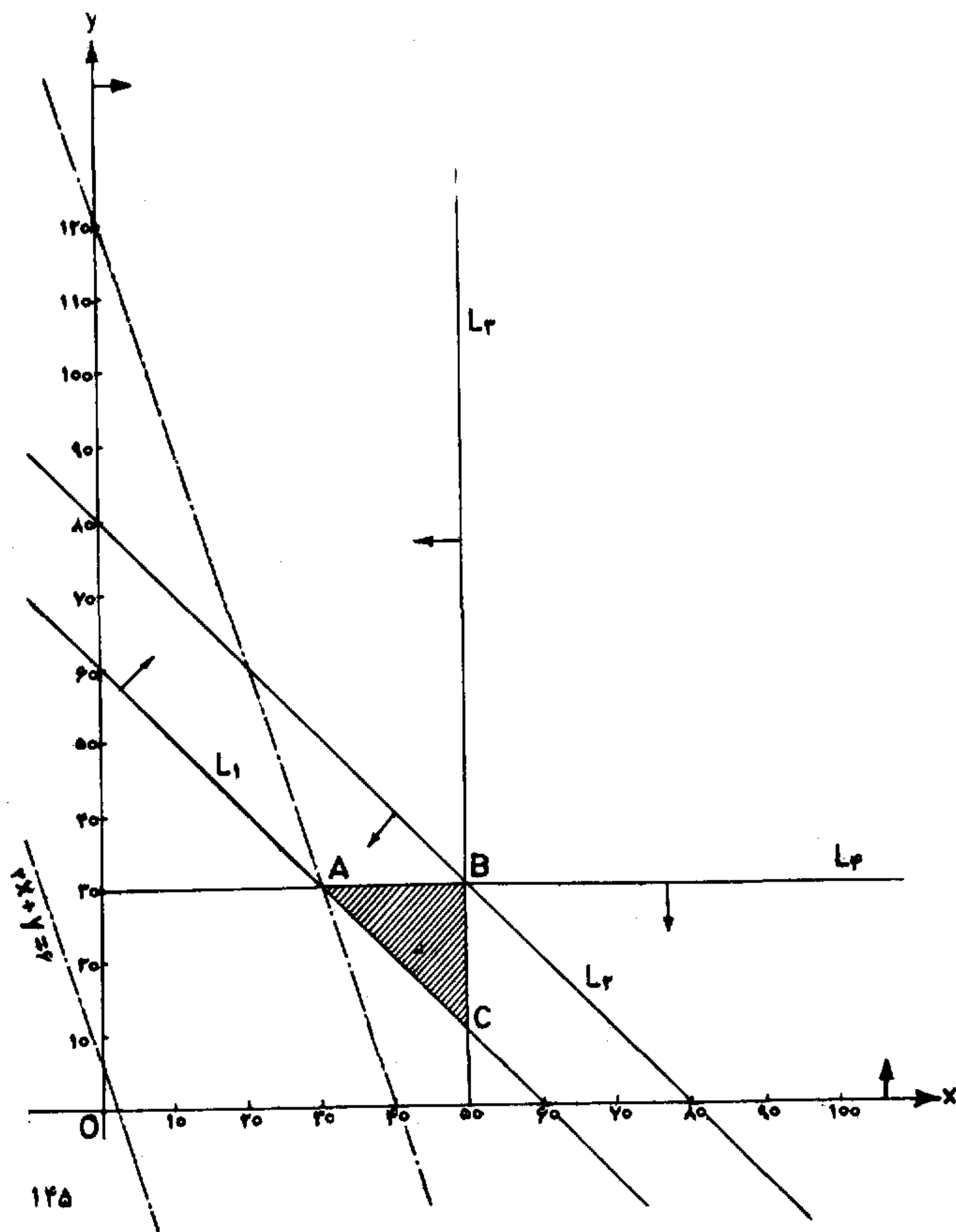
بنابراین دستگاه نامعادلات به دست آمده عبارت است :

$$\begin{cases} x+y \geqslant ۶۰ & L_۱ \\ x+y \leqslant ۸۰ & L_۲ \\ ۰ \leqslant x \leqslant ۵۰ & L_۳ \\ ۰ \leqslant y \leqslant ۳۰ & L_۴ \end{cases}$$

ظرفیت انبار $D_۱$: ($L_۱$, $L_۲$)

سفارشات رسیده ($L_۳$, $L_۴$)

نمودار این دستگاه در زیر رسم شده است :



هزینهٔ حمل و نقل ، با توجه به جدول و فرض مسئله برابر است با :

$$40x + 30y + 10(50 - x) + 20(30 - y)$$

و یا پس از ساده شدن :

$$30x + 10y + 1100$$

هرگاه این عبارت را مساوی $10P + 1100$ بگیریم (ضریب ۱۰ و عدد ۱۱۰۰ برای ساده شدن انتخاب شده‌اند) ، خواهیم داشت :

$$30x + 10y + 1100 = 10P + 1100$$

و یا :

$$3x + y = p \qquad (1)$$

یکی از دسته خطوط (۱) ، به ازای $P = 60$ ، برابر است با $3x + y = 6$ ، که نمودار آن درشکل با خط ـ نقطه رسم شده است . همان طور که در شکل دیده می‌شود خطی که از نقطهٔ $A(30 , 30)$ می‌گذرد وبا خط $3x + y = 6$ موازی‌است دارای کمترین عرض‌از مبدأ است.

برای مشتری C_1 : ۳۰ ماشین از D_1 و ۲۰ ماشین از D_2 .

برای مشتری C_2 : ۳۰ ماشین از D_1 و ۰ ماشین از D_2 .

تمرین

۱ ـ یك کارخانهٔ کوچك چترسازی دو نوع چتر مردانه و زنانه می‌سازد . برای ساختن هر چتر مردانه یك ساعت کار با ماشین A و ۲ ساعت کار با ماشین B و برای ساختن هر چتر زنانه ۴ ساعت کار با ماشین A و یك ساعت کار با ماشین B لازم است . از هر ماشین، بــه دلائل فنی، در هفته حد اکثر ۸۰ ساعت استفاده می‌شود . اگر کارخانه برای هر چتر مردانه ۲۴۰ریال و هر چتر زنانه ۳۶۰ ریال‌سود درنظر بگیرد، تعیین‌کنید از هر نوع چتر چه تعدادی در هفته بسازد تا سود او بیشینه گردد .

۲ ـ یك کارخانهٔ کود شیمیایی می‌خواهد بسته‌های کود که هر بسته اقلا محتوی ۲۲۴ گرم ازت و ۲۸۰ گرم‌فسفر است تهیه نماید .کارخانه این مواد را از استخوان و سبزی‌خشك شده تأمین می‌کند . هر کیلو استخوان دارای ۵۶ گرم فسفر و ۲۸ گرم ازت و هر کیلو سبزی خشك شده دارای ۲۸ گــرم فسفر و ۵۶ گرم ازت است . ارزش استخوان کیلویی ۲۱۰ ریال و سبزی خشك شده ۱۶۸ ریال است . تعیین‌کنید برای تهیهٔ هر بسته چند کیلو گرم استخوان و چند کیلوگرم سبزی خشك شده استفاده نماید تا هزینهٔ او کمینه گردد .

۳ ـ شخص مریضی برای‌تأمین احتیاجات ویتامین فصلی بدن خود دست کم به ۱۲۰۰ واحد ویتامین B_1 و ۱۲۰۰ واحد ویتامین B_2 و ۲۴۰۰ واحد ویتامین B_6 نیاز دارد ؛ دو نوع قرص در بازار موجوداست، نوع اول شامل ۶ واحد B_1 ، ۲ واحد B_2 و ۶ واحد B_6 وبهای

آن ۶ ریال و نوع دوم شامل ۲ واحد B_1 ، ۶ واحد B_2 و ۶ واحد B_3 است و بهای آن ۱۲ ریال می‌باشد، تعیین‌کنید از هر نوع‌چند قرص خریداری کند تا ضمن تأمین ویتامین مورد نیاز بدن خود ، کمترین پول را نیز پرداخت نماید .

۴ ـ خیاطی ۱۶ متر پارچهٔ نخی ، ۱۱ متر ابریشمی و ۱۵ متر پشمی موجود دارد . با این پارچه‌ها می‌خواهد دو نوع لباس تهیه کند . نوع اول نیاز به ۲ متر پارچهٔ نخی ، ۱ متر ابریشمی و ۱ متر پشمی دارد و نوع دوم نیاز به ۱ متر نخی ، ۲ متر ابریشمی و ۳ متر پشمی دارد . هرگاه بهای فروش لباسها ، طبق دستور شورای اصناف به ترتیب ۲۱۰۰ و ۳۵۰۰ ریال باشد ، تعیین کنید از هر لباس چند دست تهیه کند تا پولی که به دست می‌آورد بیشینه باشد.

۵ ـ شرکتی دو معدن A و B در اختیار دارد . از معدن A روزانه یك تن سنگ آهن درجهٔ ۱ ، ۳ تن درجهٔ ۲ و ۳ تن درجهٔ ۳ و از معدن B روزانه ۲ تن از نوع اول و دوم و ۱۰ تن از نوع سوم می‌تواند استخراج کند . شرکت طبق قراردادی که با بازارهای مصرف کننده بسته است نیاز به ۸۰ تن سنگ درجهٔ ۱ ، ۱۲۰ تن درجهٔ ۲ و ۴۰۰ تن درجهٔ ۳ دارد . هرگاه هزینهٔ استخراج از هر معدن روزانه ۲۰۰۰ ریال باشد، تعیین کنید چند روز باید از هر معدن بهره‌برداری کند تا هزینهٔ او کمینه گردد .

۶ ـ یك کارخانهٔ دوچرخه‌سازی دونمونهٔ دوچرخه، یکی معمولی ودیگری مسابقه‌ای می‌سازد. شرایط موجود وحاکم برکارکارخانه به‌قرار زیر است :

۱ـ ساختن هردوچرخهٔ معمولی ۶ ساعت ودوچرخهٔ‌مسابقه‌ای ۱۰ ساعت وقت‌یك کارگررا را می‌گیرد .

۲ـ کارخانه‌بیشتر از۱۵ کارگر که هرکارگرهفته‌ای ۵ روز وروزی ۸ ساعت‌کار می‌کند ، نمی‌تواند استخدام نماید .

۳ـ قیمت مواد اولیه برای هردوچرخه ۹۰۰ریال وبودجهٔ‌هفتگی کارخانه‌برای خریدمواد اولیه حداکثر ۷۲۰۰۰ریال است.

۴ـ کارخانه قراردادی‌با بازارهای مصرف‌کننده داردکه‌باید درهفته دست‌کم ۳۰دوچرخهٔ معمولی و۲۰دوچرخهٔ مسابقه‌ای تولید نماید .

۵ـ سود دوچرخهٔ‌معمولی۱۲۰۰ ریال ودوچرخهٔ مسابقه‌ای ۳۶۰۰ریال می‌باشد .

تعیین‌کنیدکارخانه درهرهفته چه تعدادی ازهرنوع‌تولیدنماید تا بیشترین‌سود عایداوگردد (سود اوبیشینه شود)

۷ ـ یك کارخانهٔ ماشین‌سازی جیپ ولندرور می‌سازد. این کارخانه موتورهای مورد نیازماشینها را ازکارخانهٔ دیگری تأمین می‌کند . سودکارخانه درفروش هرجیپ ۵۵۰۰۰ ریال

وهرلندرور ۶۵۰۰۰ ریال‌است . ظرفیت تولید این کارخانه درماه روی‌هم ۳۰۰ دستگاه است . برای‌آماده‌کردن یك جیپ ۸۰ ساعت ویك لندرور ۱۴۰ ساعت نیروی انسانی لازم است. مجموع نیروی انسانی موجود درهرماه ۳۱۵۰۰ ساعت است. کارخانه درماه حداکثر ۲۵۰ موتورجیپ و ۲۰۰ موتور لندرور دراختیار دارد. تعیین‌کنید این کارخانه ازهرنوع چند ماشین تولیدکند تا سود ماهانهٔ او بیشینه (ماکزیمم) گردد .

۸ـ یك متخصص رژیم غذایی می‌خواهد دو نوع غذا به قسمی مخلوط نمایدکه‌مقدار ویتامین غذای به دست‌آمده به شرح زیرباشد :

دست‌کم ۹ واحد ویتامین A ، ۷ واحد ویتامین B ، ۱۰ واحد ویتامین C و ۱۲ واحد ویتامین D. تعداد واحد ویتامینهای موجود درهرکیلو گرم ازاین‌غذاها طبق‌جدول‌زیراست :

ویتامین / مواد غذایی	A	B	C	D
نوع اول	۲	۱	۱	۱
نوع دوم	۱	۱	۲	۳

هرگاه بهای غذای نوع اول ازقرارکیلویی ۵۰ ریال وغذای نوع دوم‌کیلویی ۷۰ ریال باشد، تعیین‌کنید به‌چه نسبت باید این‌غذاها را ترکیب نمود تا ضمن تأمین نظر متخصص، بهای هرکیلو ازمخلوط نیز کمینه‌گردد .

۹ـ در یك معدن زغال سنگ دو رگه زغال A و B وجود دارد . مدیر این معدن قرارداد فروشی امضاکرده است‌که طبق‌آن هرهفته باید مطابق جدول زیر زغال تحویل دهد .

درجهٔ۱	۱۰۰۰ تن	درجهٔ۳	۲۰۰۰ تن
درجهٔ۲	۷۰۰ تن	درجهٔ۴	۴۵۰۰ تن

هزینهٔ‌استخراج ازرگهٔ اول ۴۰۰۰۰ ریال‌وازرگهٔ دوم ۱۰۰۰۰۰ ریال درهرنوبت کاراست مقدار زغال استخراجی درهرنوبت برحسب تن به قرارزیر است .

درجهٔ زغالها / رگه‌ها	۱	۲	۳	۴
A	۲۰۰	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰
B	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۱۵۰۰

تعیین‌کنید ازهررگه چندنوبت استخراج‌کند تا بتواند ضمن انجام تعهد هزینهٔ استخراج را به حداقل برساند .

